ANALISI I

RAVI SRINIVASAN

A.A. 2018-19

Sommario

1. Insiemistica

L'**insieme** è un concetto primitivo, non ha una definizione. Gli insiemi vengono indicati con le lettere maiuscole. Gli **elementi** sono le entità di cui è composti gli insiemi e vengono indicati con la lettera minuscola. Per indicare un insieme si può usare la **scrittura per tabulazione**:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

In questo tipo di scrittura l'**ordine degli elementi** e la **molteplicità** (elementi che si ripetono) **non contano**. Per indicare l'appartenenza di un elemento a un insieme si usa la seguente notazione:

$$x \in A \rightarrow relazione\ di\ appartenenza$$
$$x \notin A \rightarrow relazione\ di\ non\ appartenenza$$

Definizione 1.1. *L'<u>insieme vuoto</u>, indicato con il simbolo $\emptyset$, è un insieme che non contiene alcun elemento.*

1.1. Relazioni

Gli insiemi posso essere messi in relazioni secondo:

- **Relazione di uguaglianza**: ogni elemento dell'insieme A è contenuto nell'insieme B e viceversa:
$$A = B \rightarrow \begin{cases} \forall x: x \in A \Rightarrow x \in B \\ \forall x: x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$$
- **Relazione di inclusione:** l'insieme A contiene tutti gli elementi dell'insieme B:
$$A \subseteq B \rightarrow \forall x: x \in A \Rightarrow x \in B$$
- **Relazione di inclusione stretta:** l'insieme A contiene tutti gli elementi dell'insieme B, il quale contiene elementi non contenuti nell'insieme A:
$$A \subset B \rightarrow \begin{cases} \forall x: x \in A \Rightarrow x \in B \\ \exists x \in B: x \notin A \end{cases}$$

Definizione 1.2. *Si definisce <u>insieme delle parti</u> un insieme i quali elementi sono insiemi.*

Definizione 1.3. *L'<u>insieme universo</u>, indicato con $\boldsymbol{X}$, è quel particolare insieme che contiene tuti gli elementi e tutti gli insiemi esistenti, compresi quindi sé stesso e l'insieme vuoto.*

Gli insiemi possono essere anche rappresentati tramite i **diagrammi di Euler-Venn**, nella quale vengono rappresentati sotto forma di porzioni di piano.

1.2. Insiemi numerici

$\mathbb{N}$ è l'insieme dei **numeri naturali**: $\mathbb{N} = \{1, 2 , 3, \dots \}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ è l'insieme dei **numeri interi relativi**: $\mathbb{Z} = \{+1, -1, +2, -2, \dots \}$

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ è l'insieme dei **numeri razionali**: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}: n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$. Contiene i numeri decimali finiti e periodici. I numeri periodici sono i numeri decimali in cui un blocco di cifre decimali si ripete all'infinito. Il periodo può essere preceduto da un antiperiodo.

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è l'insieme dei **numeri reali**: $\mathbb{R}$ viene definito tramite la **definizione assiomatica** (vedi par …). $\mathbb{R}$ contiene $\mathbb{Q}$ più i numeri irrazionali (ad es. $\sqrt{2}, \pi, \dots$).

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ è l'insieme dei **numeri complessi**: $\mathbb{Q} = \left\{a + ib: a, b \in \mathbb{R}\ e\ i = \sqrt{-1}\right\}$. Il numero i è detti **unità immaginaria**.

1.3. Operazioni tra insiemi

Tra gli insiemi è possibile compiere varie operazioni che sono:

- **Intersezione**: è l'insieme degli elementi che appartengono sia all'insieme A che all'insieme B:
$$A \cap B = \{x: x \in A\ \wedge\ x \in B\}$$
- **Unione**: è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono all'insieme A e/o all'insieme B:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

- **Differenza:** è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono all'insieme A ma non appartengono all'insieme B:
$$A \setminus B = \{x : x \in A \ \wedge x \notin B\ \}$$
- **Prodotto cartesiano:** In matematica il prodotto cartesiano di due insiemi A e B è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$:
$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$
Si noti che non vale la proprietà commutativa: $A \times B \neq B \times A$.
(Es: Nel caso dell'insieme $\mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$).

Dalla definizione di differenza definiamo l'insieme complementare di un insieme:

Definizione 1.4. *L'insieme complementare, indicato con* $\bar{\boldsymbol{A}}$ *o* $\boldsymbol{A^C}$*, di un insieme* A*, è la differenza tra l'insieme universo e l'insieme* A*:* $\bar{A} = X \setminus A$.

1.3.1. Proprietà delle operazioni

Introduciamo le proprietà delle operazioni appena descritte.

Intersezione:

- Commutativa: $A \cap B = B \cap A$
- Associativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Idempotenza: $A \cap A = A$

Unione:

- Commutativa: $A \cup B = B \cup A$
- Associativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- Idempotenza: $A \cup A = A$

Intersezione e Unione:

- Associativa: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$

1.3.2. Leggi di De Morgan

Le di De Morgan affermano che:

Il complementare dell'unione (intersezione) di due insiemi è uguale all'intersezione (unione) dei complementari dei due insiemi e il complementare del complementare di un insieme è uguale all'insieme stesso:

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^c$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^c$

- $(A^C)^C = A$

1.4. Funzioni reali di variabile reale

Si definiscono **funzioni reali di variabile** reali le funzioni che a ogni $n \in D$ associano un $n \in \mathbb{R}$:

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f: x \to f(x)$$

Inoltre, essendo funzioni, ogni immagine ha una e una solo *controimmagine*:

$$f: \forall x \in D \longrightarrow f(x) \text{ è } unico$$

Considerando una funzione nel grafico cartesiano, la funzione è il seguente insieme di punti:

$$f: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in D\}$$

1.5. Campo ordinato

Definizione 1.5. *Un campo è un insieme numerico nel quale sono definiti somma e prodotto (si dicono definiti in un insieme gli operatori che presi due elementi qualsiasi di un insieme producono un risultato all'interno dell'insieme stesso). Alcuni esempi di campo sono $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.*

Definizione 1.6. *Un campo ordinato è un campo nel quale vale la relazione d'ordine ($\leq$ e $\geq$) totale, ossia la proprietà riflessiva ($\forall a, a \leq a$) , antisimmetrica ($\forall a, b$ se $a \leq b, a \geq b \Rightarrow a = b$) e transitiva ($\forall a, b, c,$ se $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$) sono valide in tutto l'insieme.*

1.6. Differenza tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

Se considero la retta dei numeri razionali e costruisco un quadrato di lato $l = 1$, riportando la diagonale del quadrato sulla retta, notiamo che il punto $x = \sqrt{2}$ non appartiene ala retta. Per comprendere meglio le differenze tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ introduciamo il concetto di limite.

1.6.1. Insiemi limitati

Consideriamo l'insieme ordinato X e consideriamo un suo sottoinsieme E (quindi $E \subseteq X$) Diciamo che E è:

- **Superiormente limitato** se $\exists M: x \leq M \, \forall x \in E$. In questo caso M viene detto *maggiorante* e non è unico. Il più piccolo M viene detto Sup_E. I casi possibili sono:
    - $Sup_E \notin E$
    - $Sup_E \in E$ in questo caso Sup_E viene detto Max_E
- **Inferiormente limitato** se $\exists M: x \geq m \, \forall x \in E$. In questo caso m viene detto *minorante* e non è unico. Il più grande m viene detto Inf_E. I casi possibili sono:
    - $Inf_E \notin E$
    - $Inf_E \in E$ in questo caso Inf_E viene detto Min_E
- **Limitato** se $\exists m, M: m \leq x \leq M \, \forall x \in E$

Nella notazione insiemistica le parentesi indicano i limiti dell'insieme. Se consideriamo per esempio:

$$E = (15; 20]$$

Stiamo indicando che:

$$Inf_E = 15$$
$$Max_E = 20$$

In generale le parentesi tonde indicano limiti non appartenenti all'insieme mentre le quadre indicano limiti appartenenti all'insieme. Per convenzione con limiti infiniti ($\pm\infty$) si utilizzano le parentesi tonde

1.6.2. Insiemi totalmente ordinati

Un insieme X viene detto totalmente ordinato se possiede la ***proprietà dell'estremo superiore***, ossia:

$$\forall E \subset X, E \not\equiv \emptyset \Rightarrow Sup_E \in X$$

Se considero l'insieme $\mathbb{Q}$ e il sottoinsieme $E = \left[1; \sqrt{2}\right)$ allora il $Sup_E = \sqrt{2}$. Quindi $Sup_E \notin \mathbb{Q}$. L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ non è quindi un insieme totalmente ordinato. L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ possiede invece la proprietà dell'estremo superiore ed è quindi un insieme totalmente ordinato.

1.6.3. Definizione assiomatica di $\mathbb{R}$

Definizione 1.7. *L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è un campo ordinato che gode della proprietà dell'estremo superiore.*

Essendo un campo quindi sono definiti somma, prodotto e relazione d'ordine totale. Poiché gode della proprietà dell'estremo superiore non ci sono numeri che "sfuggono". Ci sono altri modi per definire $\mathbb{R}$. Uno di questi è l'***assioma di Dedekind*** (o *di continuità* o *completezza*). Per comprendere l'assioma di Dedekind è necessario conoscere:

Definizione 1.8. *La partizione di un insieme è una qualsiasi collezione di sottoinsiemi disgiunti, non vuoti e la cui unione dia l'insieme di partenza.*
Definizione 1.9. *La sezione di un insieme è una partizione tale che* $\forall a \in A, \forall b \in B \rightarrow a < b$

L'assioma di Dedekind afferma che:

Per ogni sezione $\{A; B\}$ $\exists\, s \in \mathbb{R}$ *(chiamato elemento separatore) tale che* $\forall a \in A, \forall b \in B$ *vale* $a \leq s \leq b$.

Notiamo che ciò ad esempio non è valido per l'insieme $\mathbb{Q}$. L'assioma di Dedekind permette infatti di stabilire una corrispondenza biunivoca tra tutti i punti di $\mathbb{R}$ e i punti di una retta, cosa che abbiamo visto non essere possibile per $\mathbb{Q}$.

1.7. Cardinalità degli insiemi

Quando si parla di cardinalità di un insieme ci si riferisce al numero di elementi dell'insieme. Se ad esempio abbiamo:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

la sua cardinalità è:

$$|A| = 3$$

Considerando gli insiemi numerici abbiamo detto che:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Possiamo quindi dire che la loro cardinalità è:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = +\infty$$

Tuttavia, quando si parla di cardinalità infinita si possono distinguere due casi:

Definizione 1.10. *Si dice numerabile un insieme infinito che ha la stessa cardinalità di* $\mathbb{N}$

Se consideriamo ad esempio l'insieme $\mathbb{Z}$ notiamo che siamo in grado si stabilire una corrispondenza biunivoca tra i numeri di $\mathbb{Z}$ e i numeri di $\mathbb{N}$:

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	...
$\mathbb{Z}$	0	$+1$	-1	$+2$	-2	$+3$	...

Diciamo quindi che **l'insieme $\mathbb{Z}$ è numerabile.**

Stessa cosa possiamo dire dell'insieme $\mathbb{Q}$. Per dimostrare che $\mathbb{Q}$ è numerabile scriviamo in una tabella tutti i numeri del tipo $\frac{n}{m}$ con $n, m \in \mathbb{N}$ e con $m + n$ uguale al numero della prima casella della riga corrispondente:

1	$\frac{0}{1}$			
2	$\frac{1}{1}$			
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$		
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$

Una volta fatto ciò inserisco tutti i numeri in una tabella (aggiungendo il segno) e creo una corrispondenza biunivoca tra i numeri di $\mathbb{Q}$ e i numeri di $\mathbb{N}$:

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\mathbb{Q}$	0	$+1$	-1	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+2$	-2	$+\frac{1}{3}$	...

Diciamo quindi che anche **l'insieme $\mathbb{Q}$ è numerabile.**

1.7.1. Cardinalità di $\mathbb{R}$

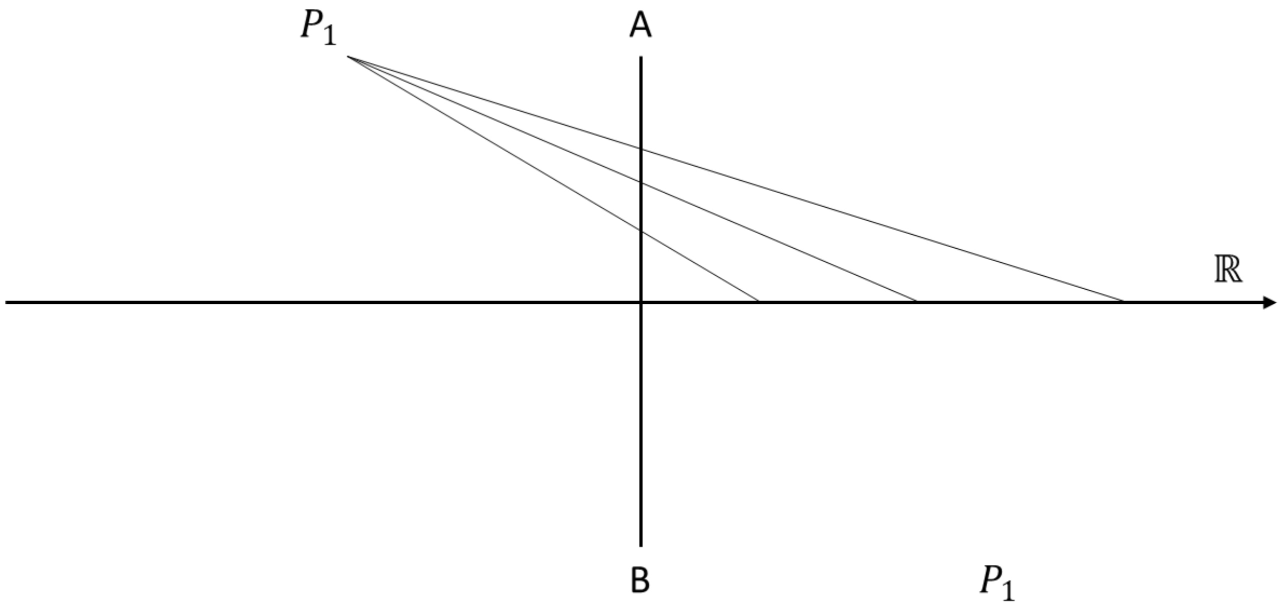
L'insieme $\mathbb{R}$, a differenza di $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$, **non è numerabile**. Possiamo dimostrare che è impossibile creare una corrispondenza biunivoca tra i numeri di $\mathbb{N}$ e i numeri di $\mathbb{R}$. Per fare ciò procediamo per assurdo:

1. Supponiamo per assurdo che l'intervallo $I = [0, 1) \in \mathbb{R}$ sia numerabile
2. Se gli elementi di I sono numerabili possono essere tutti posti in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\mathbb{N}$ (definizione 1.6.1).
3. Consideriamo allora una tabella come nei casi precedenti (indichiamo con a_{ik} le cifre decimali del numero dove i indica il numero naturale corrispondenze e k indica la posizione della cifra decimale:

$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$						
1	0,	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$\cdots$
2	0,	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$\cdots$
3	0,	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$\cdots$
4	0,	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$\cdots$

4. Ora possiamo comporre un numero del tipo $0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 \dots$ seguendo questa legge: la cifra b_1 del numero dipenderà da a_{11}, la cifra b_2 dipenderà da a_{22} e così via seguendo la diagonale. La legge di dipendenza sarà:
$$b_i = \begin{cases} 5 \; se \; a_{ii} = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 4 \; se \; a_{ii} = 5, 6, 7, 8, 9 \end{cases}$$
In questo modo ottengo un numero che ha almeno una cifra diversa da qualsiasi numero precedentemente elencato.
5. A questo punto inserisco il numero ottenuto all'interno della tabella. I numeri della tabella scaleranno quindi di un posto.
6. Posso ripetere questo processo all'infinito, si dice quindi che $\mathbb{R}$ non è numerabile poiché risulta impossibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i numeri di $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$

E' possibile estendere il concetto appena dimostrato dall'intervallo $I = [0; 1)$ all'intero insieme $\mathbb{R}$ con un semplice esempio geometrico. Consideriamo la retta dei numeri reali e disegniamo perpendicolarmente il segmento di lunghezza I in modo che la retta $\mathbb{R}$ intersechi il segmento a metà. Disegniamo due punti P_1 e P_2 all'altezza degli estremi del segmento, e consideriamo ad esempio il punto P_1. Possiamo disegnare una semiretta di origine P_1 che passi per un punto qualsiasi del segmento in modo che intersechi la retta $\mathbb{R}$, stabilendo una corrispondenza tra tutti i punti di I e tutti i punti di $\mathbb{R}$:



Si dice quindi che $\mathbb{R}$ **ha la potenza del continuo**.

2. Logica

Per introdurre l'argomento vediamo due definizioni:

Definizione 2.1. *Il predicato (o proprietà), è una frase la cui verità o falsità dipende dal valore delle variabili che lo compongono. (Es: Il numero naturale n è divisibile per 5).*

Definizione 2.2. *L'enunciato (o proposizione), è una frase per cui si può stabilire con certezza la verità o falsità. La variabile infatti non è libera ma vincolata da un quantificatore (i quantificatori possono essere **universali**, "ogni cosa", o **esistenziali**, "qualcosa"). La struttura di un enunciato è caratterizzata da un'ipotesi (**Hp**) una tesi (**Th**).*

Per verificare un **predicato** è sufficiente effettuare una prova, per quanto riguarda gli **enunciati** è invece necessario distinguere i casi:

- Perché un enunciato sia **vero** è necessario trovare un procedimento valido indipendentemente dal valore delle variabili
- Perché un enunciato sia **falso** è sufficiente trovare un controesempio

Esempio 2.1.

Consideriamo il seguente enunciato:

"Per ogni numero naturale n*, se* n *è dispari allora* n^2 è pari*"*

In questo caso è facile trovare un controesempio: considerando il numero dispari 3, notiamo che $3^2 = 9$. Essendo 9 un numero dispari l'enunciato risulta falso. Cambiamo ora la tesi dell'enunciato:

"Per ogni numero naturale n, se n è dispari allora n^2 è *dispari"*

Per verificare l'enunciato bisogna quindi trovare un procedimento che risulti vero indipendentemente dal valore delle variabili. Possiamo procedere in questo modo:

essendo n un numero dispari è possibile scriverlo come

$n = 2k + 1$

quindi

$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

notiamo quindi che $2(2k^2 + 2k) + 1$. Il procedimento non dipende né dal valore di n né dal valore di k, pertanto l'enunciato è verificato.

2.1. Dimostrazione per assurdo

La struttura generale di un enunciato è quindi:

$$\forall x \in A, p(x) \Rightarrow q(x)$$

Dove $p(x)$ rappresenta l'ipotesi e $q(x)$ rappresenta la tesi. Se $p(x)$ è vera quindi, allora risulta che $q(x)$ è vera, inoltre se $q(x)$ non è verificata di certo $p(x)$ non lo è. Se $p(x)$ invece non risulta verificata non ho informazioni su $q(x)$.

Esempio 2.2.

Consideriamo il seguente enunciato:

$$\forall n \in \mathbb{N}, se\ n \text{ è } dispari\ \Rightarrow n^2 \text{ è } dispari$$

Ciò equivale a dire:

$$\forall \in \mathbb{N}, se\ n^2 \text{ è } dispari \Rightarrow n \text{ è } dispari$$

Introduciamo quindi il concetto di **controinversa**:

$$\forall x \in A, non\ q(x) \Rightarrow non\ p(x)$$

Se quindi l'inverso di $q(x)$ è verificato allora l'inverso di $p(x)$ è verificato.

Esempio 2.3.

Consideriamo l'enunciato dell'esempio precedente:

$$\forall n \in \mathbb{N}, se\ n \text{ è } dispari\ \Rightarrow n^2 \text{ è } dispari$$

Utilizzando il concetto di controinverso allora si può dire che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, se\ n \text{ è } pari \Rightarrow n^2 \text{ è } pari$$

Sulla base dei concetti precedenti si introduce uno dei metodi più utilizzati per dimostrare teoremi: la **dimostrazione per assurdo**. Questo tipo di dimostrazione si basa sulla **negazione** della tesi, introducendo una nuova tesi che, dimostrandosi errata, conferma la tesi originale. Per comprendere meglio è utile utilizzare un esempio antichissimo ideato da Euclide.

Esempio 2.4.

Consideriamo questo assunto:

$$\sqrt{2} \text{ è } un\ numero\ irrazionale$$

Per dimostrare che l'assunto è vero, consideriamo l'assunto opposto:

$$\sqrt{2} \text{ è } un\ numero\ razionale$$

Se l'assunto fosse vero, allora $\sqrt{2}$ deve poter essere scritto sotto forma di frazione:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}\ con\ \frac{n}{m}\ ridotta\ ai\ minimi\ termini$$

Dimostro ora che questo assunto è falso:

$$se\frac{n}{m} = \sqrt{2} \Longrightarrow \frac{n^2}{m^2} = 2 \Longrightarrow n^2 = 2m^2$$

Se $n^2 = 2m$^2 allora sicuramente n^2 è un numero pari, il che equivale a dire che n è pari:

$$\Longrightarrow n = 2k \Longrightarrow (2k)^2 = 2m^2 \Longrightarrow 4k^2 = 2m^2 \Longrightarrow 2k^2 = m^2$$

Se $m^2 = 2k^2$ allora sicuramente m^2 è un numero pari, il che equivale a dire che m è pari. Se però sia n che m sono numeri pari, allora la frazione $\frac{n}{m}$ è ancora semplificabile, contraddicendo l'assunto iniziale. Dato che il controassunto non è verificato, allora l'assunto iniziale è verificato:

$$\sqrt{2} \text{ è } un\ numero\ irrazionale$$

2.2. Il principio di induzione

Un altro concetto fondamentale per la dimostrazione della veridicità di un enunciato è il **principio di induzione**. Questo procedimento viene usato per dimostrare enunciati del tipo:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow p(n)$$

Il procedimento si divide in due step:

- **Passo base:** verifico che $p(n_0)$ sia vero
- **Passo induttivo:** se $p(n_0)$ è vero allora posso procedere. Il passo induttivo si basa sul verificare che $p(n+1)$ sia vero, supponendo che $p(n)$ sia vera. Se $p(n+1)$ si domostra vero allora la tesi sarà valida per ogni $n \in \mathbb{N} : n > n_0$ perché i passaggi sono concatenati tra loro.

Per comprendere meglio il principio di induzione vediamo un esempio:

Esempio 2.5.

Consideriamo il seguente enunciato:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 3 \Rightarrow n^2 > 2n + 1$$

Passo base: verifico che la pripriet√† valga per $n = n_0$. Sostituisco $n_0 = 3$ nella disequazione e ottengo $9 > 7$: posso procedere al passo induttivo.

Passo induttivo: ora devo verificare che la propriet√† valga per $n + 1$. Suppongo che la propriet√† valga per n e procedo con la dimostrazione:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Noto che $n^2 > 2n + 1$ per ipotesi, quindi:

$$n^2 + 2n + 1 > 2n + 1 + 2n + 1$$

Inoltre poich√© lavoriamo per $n \geq 3$ sappiamo che $2n \geq 7$, quindi:

$$4n + 2 \geq 7 + 2n + 1 = 2n + 8 > 2n + 3$$

Operando un semplice raccoglimento ottengo la mia tesi:

$$(n+1)^2 > 2(n+1) + 1$$

2.2.1. Disuguaglianza di Bernoulli

Ci sono varie strade per dimostrare la **Disuguaglianza di Bernoulli**, ma una delle pi√π semplici utilizza il principio di induzione. La Disuguaglianza di Bernoulli afferma che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, x \geq 1, n \geq 0 \Longrightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Dimostrazione 2.1

Passo base: verifichiamo per $\boldsymbol{n = 0}$	$(1+x)^0 \geq 1 + 0 \Longrightarrow 1 \geq 1$
Passo induttivo: supponiamo la propriet√† verificata per $\boldsymbol{n}$ e verifico per $\boldsymbol{n+1}$:	$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$
Notiamo che:	$1 + x > 0$ $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Quindi:	$(1+x)^n(1+x) \geq (1+x)(1+nx)$ $(1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2$
Poiché:	$nx^2 \geq 0$
Possiamo scrivere che:	$1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)^x$
Possiamo quindi concludere che:	$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

2.2.2. Formula del binomio di Newton*

Per comprenderela formula del binomio di Newton è necessario definire:

- **Fattoriale:** è un'operatore che si applica a i numeri naturali e viene definito in questo modo:
  $$per\ n \in \mathbb{N}, n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$$
  Ed è dimostrabile che:
  $$0! = 1$$
- **Coefficiente binomiale**: si definisce coefficiente binomiale il seguente ente:
  $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\ con\ n, k \in \mathbb{N}\ e\ k \leq n$$

Definiti questi due enti si può procedere alla dimostrazione per induzione. Innanzi tutto la formula del binomio di Newton è:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Questa formula è utile per trovare la potenza $n$esima di un binomio, ad esempio:

Esempio 2.6.
$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^0 b^{3-0} + \binom{3}{1} a^1 b^{3-1} + \binom{3}{2} a^2 b^{2-2} + \binom{3}{3} a^3 b^{3-3} = b^3 + 3ab^2 + 3a^b + a^3$

Dimostriamo la validità della formula:

Dimostrazione 2.2

Passo base: verifichiamo per $\boldsymbol{n = 0}$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0 \Longrightarrow 1 = 1$$

Passo induttivo: supponiamo la proprietà verificata per $\boldsymbol{n}$ e verifico per $\boldsymbol{n+1}$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n =$$
$$(a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$
$$a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

A questo punto trasliamo la prima sommatoria e otteniamo:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

Portiamo fuori il termine delle due sommatorie:

$$\binom{n}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$
$$a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$
$$a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n-k+1} =$$

Notiamo che:

$$a^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n-(n+1)+1} \to [k = n+1]$$
$$b^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^0 b^{n-0+1} \to [k = 0]$$

Li possiamo quindi portare all'interno della sommatoria e ottenere:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{(n+1)-k} = (a+b)^{n+1}$$

3. Successioni

Definizione 3.1. *Una successione $\{a_n\}$ è una legge che associa a un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ uno e un solo valore $a_n \in \mathbb{R}$*

Si dice che una successione è:

- **Limitata inferiormente** se $\exists m: \forall n, a_n \geq m$
- **Limitata superiormente** se $\exists M: \forall n, a_n \leq M$
- **Limitata** se $\exists m, M: \forall n, m \leq a_n \leq M$

Introduciamo inoltre le ***proprietà assunte definitivamente*** per le successioni:

Definizione 3.2. *Data una successione $\{a_n\}$ si dice che essa assume una proprietà definitivamente quando esiste un $n^* \in \mathbb{N}$ tale che a_n soddisfi la proprietà per ogni $n \geq n^*$.*

Vediamo due esempi:

Esempio 3.1.

Consideriamo la successione $a_n = n - 10\sqrt{n}$ della quale vogliamo sapere quando $a_n > 0$. Svolgendo i calcoli:

$$n - 10\sqrt{n} > 0 \rightarrow n > 10\sqrt{n} \rightarrow n^2 > 100n \rightarrow n > 100$$

Con $n > 100$ sappiamo quindi che $a_n > 0$. Quindi diciamo che $n^* = 101$

Esempio 3.2.

Consideriamo la successione $a_n = \frac{1}{n}$ della quale vogliamo sapere quando $a_n < \frac{1}{1000}$. Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{1000} \rightarrow n > 1000$$

Con $n > 1000$ quindi $a_n < \frac{1}{1000}$. Diciamo quindi che $n^* = 1001$

3.1. Successioni convergenti*

Definizione 3.3. *Diciamo che una successione $\{a_n\}$ è* ***convergente*** *quando:*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n^* \in \mathbb{N}: \forall n \geq n^*, |a_n - l| < \varepsilon$$

Spieghiamo in modo esplicito: chiamato l ***limite della successione***, si dice che una successione converge a l se preso un qualsiasi ε (ossia la distanza dal limite), esiste un n^* per cui la legge $|a_n - l| < \varepsilon$ (che equivale a dire $-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$) viene assunta definitvamente, ossia per cui la distanza tra a_n e l sia minore di ε. Quindi n^* può essere trovato per un qualsiasi valore di ε.

Introdotta questa definizione, possiamo introdurre il concetto di limite. Si dice che $a_n \to l$ (a_n tende a l) per $n \to \infty$ (per n che tende a infinito). La notazione per indicare questo concetto è:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \ con \ l \in \mathbb{R}$$

Se la successione converge a 0 si parla di successione ***infinitesima***.

Teorema 3.1 *Il* ***teorema di unicità del limite**** *afferma che se una successione ha limite l, esso è unico.*

Dimostrazione 3.1	
Hp:	Sia $\{a_n\}$ una successione Valga $\lim_{n\to\infty} a_n = l$
Th:	l è unico
Supponiamo per assurdo che l non sia unico:	$\exists l_1, l_2: l_1 \neq l_2$
Consideriamo il modulo della differenza tra i due limiti:	$\lvert l_1 - l_2\rvert = \lvert l_1 - a_n + a_n - l_2\rvert$
Per la disuguaglianza triangolare che afferma che $\boldsymbol{\lvert a + b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert}$ possiamo dire che:	$\lvert l_1 - a_n + a_n - l_2\rvert \leq \lvert l_1 - a_n\rvert + \lvert a_n - l_2\rvert$ $\lvert l_1 - a_n\rvert + \lvert a_n - l_2\rvert = \lvert a_n - l_1\rvert + \lvert a_n - l_2\rvert$
Notiamo che $\boldsymbol{\lvert a_n - l_1 \rvert < \varepsilon}$ e $\boldsymbol{\lvert a_n - l_2 \rvert < \varepsilon}$, possiamo quindi scrivere:	$\lvert a_n - l_1\rvert + \lvert a_n - l_2\rvert < 2\varepsilon$

Il che significa che:	$|l_1 - l_2| < 2\varepsilon$
Poiché ciò deve valere $\forall \boldsymbol{\varepsilon}$, l'unico caso in cui ciò è valido è per:	$l_1 = l_2$

Per comprendere meglio possiamo vedere un esempio:

Esempio 3.3.

Calcoliamo il limite per $n \to \infty$ di $a_n = \frac{n+2}{n-3}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n-3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1-\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n}} = 1$$

Ora possiamo verificare tramite la definizione di limite:

$$\left|\frac{n+2}{n-3} - 1\right| < \varepsilon \to 1 - \varepsilon < \frac{n+2}{n-3} < \varepsilon + 1$$

Dividiamo i casi:

$1 - \varepsilon < \frac{n+2}{n-3}$ è sempre verificato perché il numeratore è maggiore del denominatore

$$\frac{n+2}{n-3} < \varepsilon + 1 \to n + 2 < (1+\varepsilon)(n-3) \to n > \frac{1+3\varepsilon}{\varepsilon}$$

Abbiamo quindi trovato che in questo caso $n^* = \left\lceil \frac{1+3\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil$

3.2. Successioni divergenti

Definizione 3.4. *Diciamo che una successione $\{a_n\}$ è **divergente** (o **infinita**):*

a $+\infty$ quando $\forall M > 0\ \exists n^* \in \mathbb{N}: \forall n \geq n^*, a_n > M$, ossia quando supera in modo definitivo qualsiasi $M > 0$
a $-\infty$ quando $\forall M > 0\ \exists n^* \in \mathbb{N}: \forall n \geq n^*, a_n < -M$, ossia quando scende in modo definitivo al di sotto di qualsiasi $-M$ con $M > 0$

E' possibile generalizzare la definizione dicendo che una successione è divergente $\forall M > 0\ \exists n^* \in \mathbb{N}: \forall n \geq n^*, |a_n| > M$

Utilizzando il concetto di limite di una successione, diremo che la successione $\{a_n\}$ è:

Divergente a $+\infty$ se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Divergente a $-\infty$ se $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Quindo una successione è divergnete se ha limite in $\mathbb{R}^*$ ma non in $\mathbb{R}$ (con $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} + \{-\infty\}$).

3.3. Limiti delle successioni

Oltre alle successioni convergenti e divergenti esistono le successioni ***irregolari***, ossia quelle successioni che non ammettono limite all'infinito. Alcuni esempi sono:

$(-1)^n$ che oscilla tra i valori ± 1

$\text{sen}(n)$ che oscilla anch'essa tra ± 1

Quando parliamo di funzioni convergenti, il comportamento della successione può essere di tre tipi:

- se si avvicina a l dall'alto, quindi se $\forall \varepsilon > 0, \exists n^* \in \mathbb{N}: \forall n \geq n^*, 0 \leq a_n - l < \varepsilon$, si dice che la successione è **convergente per eccesso**. Con la notazione dei limiti si scrive:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l^+$$

- se si avvicina a l dal basso, quindi se $\forall \varepsilon > 0, \exists n^* \in \mathbb{N}: \forall n \geq n^*, -\varepsilon < a_n - l \leq 0$, si dice che la successione è **convergente per difetto**. Con la notazione dei limiti si scrive:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l^-$$

negli altri casi ci limitiamo a dire che la successione è convergente

In generale quando vogliamo trovare il carattere di una successione è quindi sufficiente calcolare il limite della successione per $n \to \infty$.

3.4. Successioni monotone*

Diciamo che una successione è **monotona**:

- **Crescente** (o **non decrescente**) se $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq a_{n+1}$
- **Strettamente crescente** se $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n < a_{n+1}$
- **Decrescente** (o **non crescente**) se $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq a_{n+1}$

- **Strettamente decrescente** se $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > a_{n+1}$

Di particolare importanza è il **teorema di monotonia**, che ora dimostreremo. La dimostrazione viene fatta per $\{a_n\}$ crescente e superiormente limitata, ma è analoga per $\{a_n\}$ decrescente e inferiormente limitata:

Teorema 3.2 *Il **teorema di monotonia afferma** che una funzione monotona crescente $\{a_n\}$ con limite $\Lambda \in \mathbb{R}$ è convergente. In particolare:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \Lambda$$

Dimostrazione 3.2	
Hp:	Sia $\{a_n\}$ una successione monotona crescente Valga $Sup(\{a_n\}) = \Lambda \in \mathbb{R}$
Th:	$\Lambda \in \mathbb{R}$ *è convergente* $\lim_{n\to\infty} a_n = \Lambda$
Partiamo dalla definizone di limite:	$\lvert a_n - \Lambda \rvert < \varepsilon$ $-\varepsilon < a_n - \Lambda < \varepsilon$ $\Lambda - \varepsilon < a_n < \Lambda + \varepsilon$
Consideriamo prima la parte sinistra della disequazione, notiamo che $\boldsymbol{\Lambda - \varepsilon}$ è un numero minore del limite superiore della successione, quindi possiamo raggiungerlo. Possiamo affermare quindi che:	$\exists n_0 : a_{n_0} > \Lambda - \varepsilon$
La seconda parte della disuguaglianza è ovvia poiché essendo per ipotesi $\boldsymbol{\Lambda}$ il limite superiore vale $\boldsymbol{a_n \leq \Lambda}$. Sicuramente quindi:	$a_n < \Lambda + \varepsilon$
Essendo la disuguaglianza verifica il limite $\{\boldsymbol{a_n}\}$ della successione esiste ed è uguale a $\boldsymbol{\Lambda}$:	$\lim_{n\to\infty} a_n = \Lambda$

3.4.1. Corollario del teorema di monotonia*

Introduciamo quindi un **corollario del teorema di monotonia** (un corollario è un teorema che deriva da un altro teorema). Dimostreremo il corollario per una successione monotona crescente, ma è analoga per successioni monotone decrescenti:

Teorema 3.3 *Il* ***corollario del teorema di*** *monotonia afferma che una successione monotona crescente* $\{a_n\}$ *ha* $\lim_{n\to\infty} a_n = Sup\{a_n\}$.

Dimostrazione 3.3

Hp:	Sia $\{a_n\}$ una successione monotona crescente
Th:	$\lim_{n\to\infty} a_n = Sup\{a_n\}$

Caso 1

Successione superiormente limitata:	ci rifacciamo al teorema di monotonia

Caso 2

Successione superiormente illimitata:	possiamo dire che $k > 0\ \exists n_o \in \mathbb{N}: a_{n_0} > k$
Richiamiamo quindi la definizione di successione crescente:	$\forall\, n \geq n_0, \quad a_n \geq a_{n_0}$
Unendo le due definizioni otteniamo che:	$\begin{cases} \forall k > 0\ \exists n_o \in \mathbb{N}: a_{n_0} > k \\ \forall\, n \geq n_0\ a_n \geq a_{n_0} \end{cases}$
Ricaviamo che:	$a_n \geq a_{n_0} > k \to a_n > k$
Poiché ciò vale $\forall \boldsymbol{k}$:	$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

3.5. Algebra dei limiti

Introduciamo ora alcune operazioni tra limiti. Consideriamo le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ con:

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = a$$
$$\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = a$$

Sappiamo che:

- $\lim_{n\to\infty}(\{a_n\} \pm \{b_n\}) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(\{a_n\} \cdot \{b_n\}) = a \cdot b$
- $\lim_{n\to\infty}(\{a_n\}/\{b_n\}) = a/b$
- $\lim_{n\to\infty}\{a_n\}^{\{b_n\}} = a^b$

Dimostriamo la prima uguaglianza:

Dimostrazione 3.4

Per la definizione di limite valgono le seguenti proprietà definitivamente $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$:	$\exists n \in \mathbb{N}: \|a_n - a\| < \varepsilon$ $\exists n \in \mathbb{N}: \|b_n - b\| < \varepsilon$ $\|a_n - a\| + \|b_n - b\| < 2\varepsilon$
Per la disuguaglianza triangolare posso affermare che $\exists \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$::	$\|a_n - a + b_n - b\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| < 2\varepsilon$
Ricaviamo che:	$\exists n \in \mathbb{N}: \|a_n - a + b_n - b\| < 2\varepsilon$

Quindi su può dire che per $n \to \infty$ la somma delle successioni tende alla somma dei limiti delle successioni.

3.5.1. Operazione con ∞

Lavorando coi limiti capita spesso di dover compiere operazioni con termini infiniti. Mostriamo quindi alcuni casi (il termine a apprtiene a $\mathbb{R}$):

- $a + \infty = +\infty$
- $a - \infty = -\infty$
- $+\infty + \infty = +\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$

- $a \cdot \infty = \infty$
- $\frac{a}{0} = \infty$
- $\frac{a}{\infty} = 0$

In questi casi dove il risultato è ben determinato si compire una "***aritmetizzazione parziale del simbolo*** ∞". Si parla di aritmetizzazione **parziale** perché esistono comunque forme di imprecisione, ossia casi in cui non posso stabilire un risultato in modo immediato:

- $+\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- 1^{∞}

Quando quindi incontriamo un limite di una successione l'approccio è il seguente:

- Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ è trattabile arrivo immediatamente al risultato
- Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ non è trattabile cerco di arrivare in modo algebrico a una scrittura trattabile

Esempio 3.4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 0$$

Esempio 3.5.

Ricordando che

$$(a-b)(a^2+b^2+ab) = a^3 - b^3$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}\right) \cdot \frac{(n+1)^{\frac{1}{3}} + (n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}}(n-1)^{\frac{1}{3}}}{(n+1)^{\frac{1}{3}} + (n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}}(n-1)^{\frac{1}{3}}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-(n-1)}{(n+1)^{\frac{1}{3}} + (n+1)^{\frac{2}{3}} + (n+1)^{\frac{1}{3}}(n-1)^{\frac{1}{3}}} = 0$$

Esempio 3.6.

$$\lim_{n\to\infty} (a_n^{b_n}) = \lim_{n\to\infty} 10^{\log_{10}(a_n^{b_n})} = \lim_{n\to\infty} 10^{b_n \log_{10}(a_n)}$$

3.5.2. Limiti notevoli

Il limite di alcune successioni è noto. Questo risulta utile poiché in caso di forme di imprecisioni è sufficiente ricondursi a queste forme per calcolare il limite. E' noto il limite di:

- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ e più in generale $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

Quando invece abbiamo il limite di un rapporto di successioni, ci interessa capire quale va più velocemente a ∞ o 0 a seconda del caso. Se consideriamo il limite a due successioni infinite possiamo avere $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} =$

- 0 se a_n è infinita di ordine inferiore a b_n
- $l \neq 0$ e finito se a_n e b_n sono infinite dello stesso ordine
- ∞ se a_n è infinita di ordine superiore a b_n
- $\nexists$ se a_n e b_n sono infinite non confrontabili

Se consideriamo il limite di due succession infinitesime possiamo avere $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} =$

- 0 se a_n è infinitesima di ordine superiore a b_n
- $l \neq 0$ e finito se a_n e b_n sono infinitesime dello stesso ordine
- ∞ se a_n è infinitesima di ordine inferiore a b_n
- $\nexists$ se a_n e b_n sono infinitsime non confrontabili

3.5.3. Successioni asintotiche

Concetnriamoci sul caso in cui il limite del rapporto di successioni è $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l : l \neq 0$. In particolare se $l = 1$ si dice che le due successioni sono **asintotiche**, ossia hanno un comportamento simile per $n \to \infty$. La notazione che indica che due successioni sono asintotiche è:

$$a_n \sim b_n$$

L'asintoticità ha alcune proprietà:

- Riflessività: $a_n \sim a_n$
- Simmetria: $a_n \sim b_n \Rightarrow b_n \sim a_n$
- Transitività: $a_n \sim b_n, b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$

Una relazione che soddisfa queste tre proprietà è detta ***relazione di equivalenza***. Vale inoltre la seguente proprietà:

- S e $a_n \sim a'_n, b_n \sim b'_n$ e $c_n \sim c'_n \Rightarrow \frac{a_n \cdot b_n}{c_n} = \frac{a'_n \cdot b'_n}{c'_n}$

3.5.4. Criterio del rapporto

Ritornando al concetto di ordine di infinito, diciamo che n^α è infinito di ordine α. Possiamo inoltre stabilire una gerarchia di ordine di infiniti:

$$\log_\alpha n < n^\alpha < a^n < n!$$

Per dimostrare che il fattoriale è infinito di ordine superiore rispetto all'esponenziale introduciamo il ***criterio del rapporto***:

Teorema 3.4 *Il **criterio del rapporto** afferma che data una successione $\{a_n\}$ positiva per ogni n tale che esista $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ con $l \in \mathbb{R}^*$ allora possiamo dire che:*

se $l < 1$ allora a_n converge a 0
se $l > 1$ allora a_n è divergente a $+\infty$

Dimostrazione 3.5

Hp:	Sia $\{a_n\}$ una successione sempre positiva Esista $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l : l \in \mathbb{R}^*$
Th:	se $l < 1 \Rightarrow a_n \to 0$ se $l > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$
Considerando la definizione di limite scriviamo:	$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$

Caso 1

Se $\boldsymbol{l < 1}$ utilizziamo la seconda parte della diseguaglianza:	$\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$
Se $\boldsymbol{l < 1}$ posso quindi trovare un ε per cui $\boldsymbol{l + \varepsilon < 1}$. Posso quindi scrivere:	$a_{n+1} < (l+\varepsilon)a_n$ $a_{n_0+1} < (l+\varepsilon)a_{n_0}$ $a_{n_0+2} < (l+\varepsilon)a_{n_0+1} = (l+\varepsilon)^2 a_{n_0}$

Possiamo quindi scrivere in generale:	$a_{n_0+k} < (l+\varepsilon)^k a_{n_0}$
Quindi $\boldsymbol{a_{n_0+k}}$ è limitata superiormente da una successione convergente a $\mathbf{0}$ e non è mai negativa per ipotesi:	$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
Caso 2	
Se $\boldsymbol{l} > \mathbf{1}$ utilizziamo la prima parte della diseguaglianza:	$l-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$
Se $\boldsymbol{l} > \mathbf{1}$ posso quindi trovare un ε per cui $\boldsymbol{l-\varepsilon} > \mathbf{1}$. Posso quindi scrivere:	$a_{n+1} > (l-\varepsilon)a_n$ $a_{n_0+1} > (l-\varepsilon)a_{n_0}$ $a_{n_0+2} > (l-\varepsilon)a_{n_0+1} = (l-\varepsilon)^2 a_{n_0}$
Possiamo quindi scrivere in generale:	$a_{n_0+k} > (l-\varepsilon)^k a_{n_0}$
Quindi $\boldsymbol{a_{n_0+k}}$ è limitata inferiormente da una successione divergente a +∞ (abbiamo definito $\boldsymbol{l-\varepsilon} > \mathbf{1}$). Quindi:	$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Possiamo quindi usare questo teorema pe dimostrare che il fattoriale è infinito di ordine superiore all’esponenziale. Consideriamo la successione $\{b_n\} = \frac{a^n}{n!}$ e usiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{n+1!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a \cdot \frac{a^n}{(n+1)*n!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1}$$

Se calcoliamo il limite del rapporto otteniamo quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0$$

Per il criterio del rapporto quindi $\{b_n\} \to 0$ per $n \to \infty$, come volevasi dimostrare.

3.6. Teorema di permanenza del segno

Uno dei teoremi fondamentali riguardo ai limiti di successioni è il ***teorema di permanenza del segno***. Dimostreremo il teorema per $l > 0$, il teorema con $l < 0$ non è altro che la controinversa di esso.

Teorema 3.5 *La **prima forma** del **teorema di permanenza del segno** afferma che: sia $\{a_n\}$ una successione tale percui con $n \to \infty$ la successione $\{a_n\} \to a$ con $a > 0$. Allora esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale per cui per $n > n_0$ la successione è definitivamente positiva.*

Dimostrazione 3.6

Hp:	Sia $\{a_n\}$ una successione $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = a > 0$
Th:	$\exists n_0 : \forall n > n_o, a_n > 0$
Richiamando la definizione di limite sappiamo che $\forall \boldsymbol{\varepsilon}$ allora vale definitivamente:	$\exists n \in \mathbb{N} : \lvert a_n - a \rvert < \varepsilon$ $\exists n \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_n$
Poiché so per ipotesi che $\boldsymbol{a > 0}$, posso resitringere la condizione scegliando:	$\varepsilon : a - \varepsilon > 0$
Ottengo quindi che:	$\exists n \in \mathbb{N} : 0 < a - \varepsilon < a_n$ $\Rightarrow a_n > 0$

Questo teorema ci dice quindi che il segno passa dal limite al termine della successione con disuguaglianze strette, non vale tuttavia il viceversa.

Esempio 3.7.

Se consideriamo la successione $\{a_n\} = \frac{1}{n}$ esso è strettamente maggiore di 0. Tuttavia se calcoliamo il limite otteniamo che:

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Vi è inoltre un'altra forma del teorema:

Teorema 3.6 *La* ***seconda forma*** *del* ***teorema di permanenza del segno*** *afferma che, date le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ e un $n_0 \in \mathbb{N}$ tali per cui per $n \to \infty$ le successioni $\{a_n\} \to a$ e $\{b_n\} \to b$ e tale per cui dopo n_0 valga definitivamente $a_n \geq b_n$. Allora sicuramente $a \geq b$.*

Un enunciato analogo è:
Date le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ e la successione $\{c_n\} = \{a_n\} - \{b_n\}$ e un $n \in \mathbb{N}$ tali per cui per $n \to \infty$ le successioni $\{a_n\} \to a$, $\{b_n\} \to b$ e $\{c_n\} \to c$ e tale per cui dopo n valga definitivamente $a_n \geq b_n$, sicuramente $c = b - a$.

3.6.1. Teorema del confronto*

Di fondamentale importanza è anche il ***teorema del confronto***:

Teorema 3.7 *Il* ***teorema del confronto*** *afferma che, date tre successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$, allora posso $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$*

Dimostrazione 3.7

Hp:	Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ e $\{c_n\}$ *successioni* $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n \leq c_n$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$
Th:	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$
La definizione di limite mi dice che preso un qualsiasi $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ vale definitivamente che:	$\exists n \in \mathbb{N}: \lvert a_n - l\rvert < \varepsilon$ $\exists n \in \mathbb{N}: \lvert c_n - l\rvert < \varepsilon$
Che equivale a dire che:	$\exists n \in \mathbb{N}: -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$ $\exists n \in \mathbb{N}: -\varepsilon < c_n - l < \varepsilon$

Poiché per ipotesi $\boldsymbol{a_n \leq b_n \leq c_n}$ posso affermare che:	$l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon$ $l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$
Il che significa per la definizione di limite (ricordando che il limite è unico) che:	$\lim_{n\to\infty} b_n = l$

3.6.2. Corollari del teorema del confronto

Il teorema del confronto ha alcuni corollari.

Teorema 3.8 *Il **primo corollario** del teorema del confronto afferma che, date due successioni $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tali che $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ e che dopo un $n_0 \in \mathbb{N}$ vale definitivamente che $|b_n| < c_n$, posso affermare che $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$*

Dimostrazione 3.8

Hp:	Siano $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ *successioni* $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ $\exists n_0 \colon \forall n > n_0, \lvert b_n \rvert < c_n$
Th:	$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
La scrittura $\boldsymbol{\lvert b_n \rvert < c_n}$ equivale a dire:	$-c_n < b_n < c_n$
Poiché per ipotesi $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} c_n = 0}$ per il teorema del confronto:	$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Vi è inoltre un altro corollario:

Teorema 3.9 *Il **secondo corollario** del teorema del confronto afferma che: siano $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ due successioni tale che $\{b_n\}$ sia limitata e che $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, allora posso affermare che $\lim_{n\to\infty} (b_n \cdot c_n) = 0$*

4. Numeri complessi

Nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali se consideriamo l'espressione:

$$a^b$$

essa è valida $\forall b$ solo se $a > 0$. Se infatti $a \leq 0$ lavorando all'interno di $\mathbb{R}$ l'espressione è verificata solo per esponenti $b > 0$. Possiamo tuttavia passare all'**insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi**. All'interno di $\mathbb{C}$ è infatti possibile calcolare le radici di qualsiasi numero negativo. In particolare:

$$\sqrt{-1} = i$$

Il numero i prende il nome di ***variabile immaginaria*** e consente di calcolare la radice di qualsiasi numero conoscendo semplicemente le proprietà delle radici:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$$
$$\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81} * \sqrt[4]{-1} = 3 * \sqrt{\sqrt{-1}} = 3\sqrt{i}$$

In generale i numeri complessi si possono scrivere come somma tra un numero reale e un numero moltiplicato per la variabile immaginaria (questa scrittura è detta **forma algebrica**):

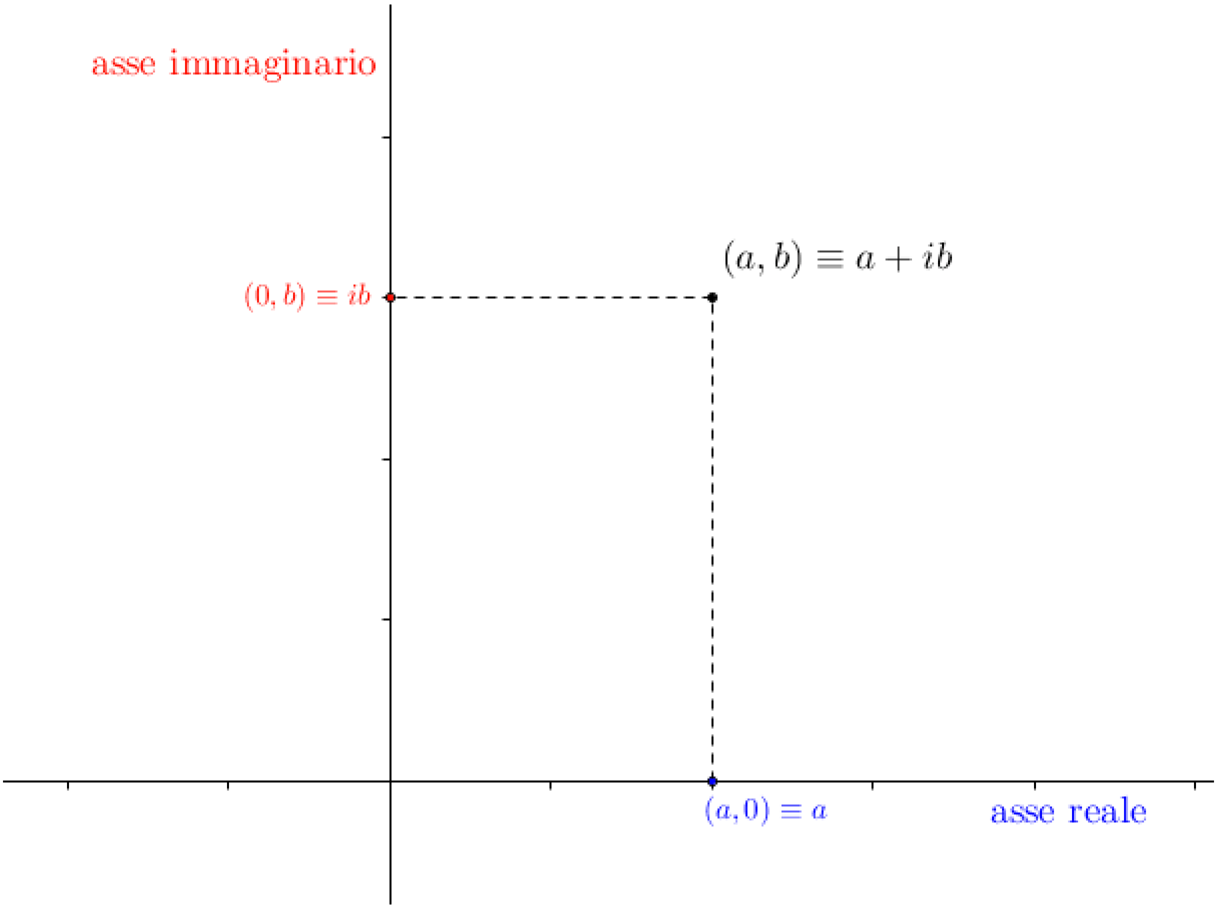
$$z = a + ib$$

Dove:

- a rappresenta la **parte reale** (indicata anche come $\mathbb{R}e(z)$)
- b rappresenta la **parte immaginaria** (indicata anche come $\mathbb{I}m(z)$)

I numeri del tipo $z = ib$ sono detti *immaginari puri*.

I numeri complessi possono essere rappresentati sul **piano di Gauss** (un piano dove l'asse orizzontale rappresenta la parte reale mentre quello verticale rappresenta la parte immaginaria). I numeri sono i punti del piano del tipo $z = (a, b)$.



4.1. Operazioni tra numeri complessi

Le prime operazioni che vediamo tra numeri complessi sono **somma e sottrazione**. Dati i numeri complessi:

$$z_1 = (a_1 + ib_1)$$
$$z_2 = (a_2 + ib_2)$$

Definiamo somma e sottrazione come:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) \pm i(b_1 + b_2)$$

Somma e sottrazione hanno un preciso significato geometrico nel piano di Gauss. Se considero i vettori associati ai numeri, la somma è a somma vettoriale dei due vettori.

Il **prodotto** tra due numeri complessi è invece definito come

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 + a_1 b_2 + b_1 a_2$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

Essendo somma e prodotto interni, si dice che $\mathbb{C}$ **è un campo**. Non è tuttavia ordinato perché non possiamo confrontare due numeri.

Dato il numero $z = a + ib$, si definisce il **coniugato** $\overline{z} = a - ib$ ed è il simmetrico di z rispetto all'asse orizzontale. Ha alcune proprietà:

- $z + \overline{z} = 2a = 2\mathbb{R}e(z)$
- $z - \overline{z} = 2ib = 2\mathbb{I}m(z)$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a+ib}{a^2-i^2b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

4.2. Modulo di un numero complesso

Definiamo il **modulo** di un numero complesso ($|z|$ o ρ) come modulo del vettore associato nel piano di Gauss:

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Notiamo quindi che il modulo di un numero complesso è un numero reale:

$$z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z| \in \mathbb{R}: |z| \geq 0$$

Riguardo al modulo del vettore possiamo introdurre alcune proprietà:

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |\overline{z}|$
- $|\mathbb{R}e(z)| \leq |z| \qquad |\mathbb{I}m(z)| \leq z \qquad |z| \leq |\mathbb{R}e(z)| + |\mathbb{I}m(z)|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (disuguaglianza triangolare)
- $|z_1 + z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$

Dimostriamo l'ultimo punto.

Dimostrazione 4.1

Consideriamo due numeri complessi: $z_1 = a + ib$
$z_2 = c + id$

Svolgiamo ora i calcoli:

$$|(a+c)+i(b+d)| \geq \left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right|$$
$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \geq \left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right|$$
$$(a+c)^2+(b+d)^2 \geq \left(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right)^2$$
$$a^2+c^2+2ac+b^2+d^2+2bd \geq a^2+b^2+c^2+d^2-2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$
$$ac+bd \geq -\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

Restringiamo a questo punto la condizione e otteniamo:

$$|ac+bd| \leq \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$
$$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$
$$a^2c^2+b^2d^2+2abcd \leq a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$
$$a^2d^2+b^2c^2-2abcd \geq 0$$

Otteniamo quindi che:

$$(ad+bc)^2 \geq 0$$
$$vera\ \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Se invece consideriamo il modulo della differenza tra due numeri complessi, possiamo notare che non è altro che la distanza di due numeri nel piano di Gauss. Se infatti consideriamo:

$$z_1 = a_1 + ib_1$$
$$z_2 = a_2 + ib_2$$
$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

Notiamo che il modulo non è altro che la definizione della distanza di due punti nello spazio:

$$|(a1-a2)+i(b1-b2)| = \sqrt{(a1-a2)^2+(b1-b2)^2}$$

Il prodotto di un numero complesso per il suo complementare invece è uguale al quadrato del modulo del numero:

$$z = a + ib$$
$$\overline{z} = a - ib$$
$$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Possiamo vedere un esempio di equazione coi numero complessi.

Esempio 4.1.

Consideriamo un equazione con $z = x + iy$

$$z^2 + i\mathbb{I}m(z) + 2\overline{z} = 0$$
$$(x+iy)^2 + iy + z(x-iy) = 0$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy + iy + 2x - 2iy = 0$$
$$(x^2 - y^2 + 2x) + i(2xy - y) = 0$$

Otteniamo che

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 2xy - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ y(2x - 1) = 0 \end{cases}$$

Da cui otteniamo:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x(x+2) = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow z_1 = 0$$
$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow z_2 = -2$$
$$\begin{cases} y = -\frac{\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{5}}{2}$$

4.3. Moltiplicare e dividere per *i*

Vediamo ora cosa vuol dire moltiplicare un numero complesso per la variabile immaginaria, in particolare in termini geometrici. Consideriamo il numero $z = a + ib$ e moltiplichiamolo per i:

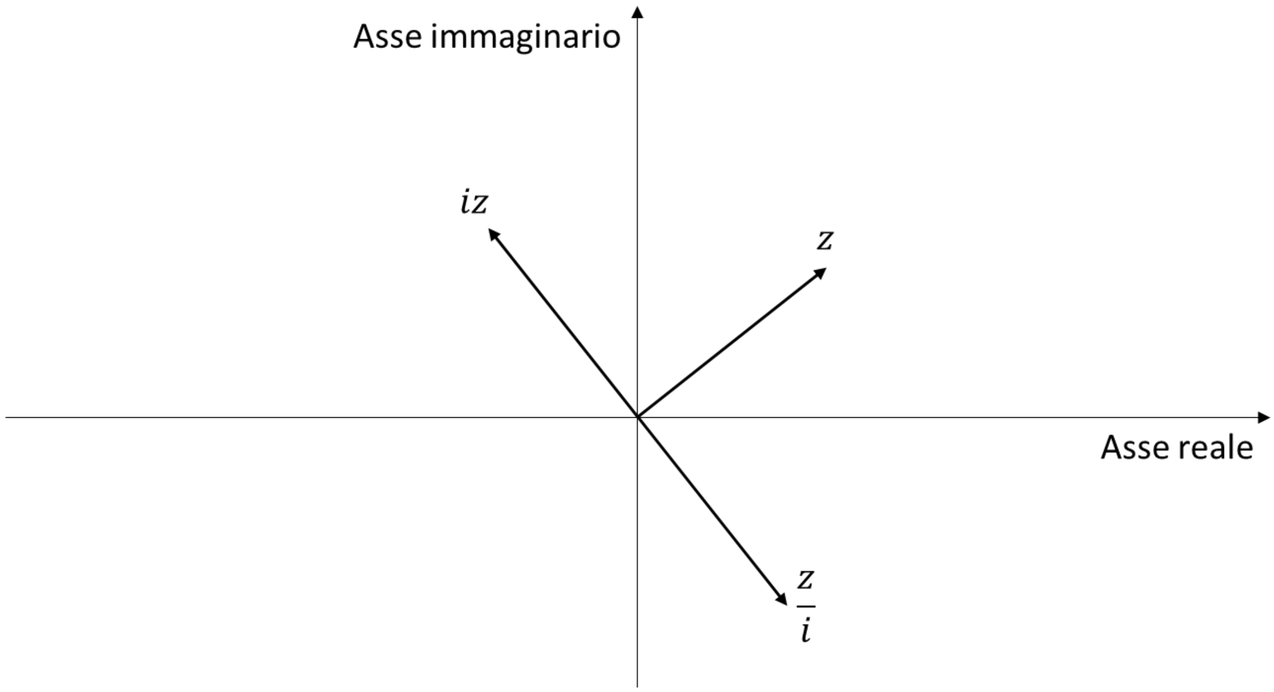
$$iz = i(a + ib) = ia + i^2b = -b + ia$$

Se guardiamo il piano di Gauss notiamo che moltiplicando per i il numero z si sposta. In particolare il vettore z compie una rotazione di angolo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ con centro nell'origine degli assi.

In modo analogo vediamo cosa succede se dividiamo per i sapendo che $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$:

$$\frac{z}{i} = \frac{z \cdot (-i)}{|i|^2} = -iz = -i(a+ib) = -ia - i^2b = b - ia$$

Se guardiamo il piano di Gauss notiamo che dividento per i il numero z si sposta. In particolare il vettore z compie una rotazione di angolo $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ con centro nell'origine degli assi.



4.4. Moltiplicare e dividere per $k \in \mathbb{R}$

Proviamo ora a moltiplicare un numero complesso $z = a + ib$ per un numero $k \in \mathbb{R}$:

$$kz = k(a+ib) = ka + i(kb)$$

In questo caso se guardiamo il piano di Gauss notiamo che il vettore z viene dilatato di un fattore k.

4.5. Forma trigonometrica

Esiste un'altra notazione per scrivere i numeri complessi chiamata ***forma trigonometrica***. Se consideriamo l'angolo compreso tra l'asse $\mathbb{R}$ e il vettore z possiamo riscrivere le componenti del vettore come:

$$a = \rho cos\theta$$

$$b = \rho sen\theta$$

Possiamo quindi riscrivere z in questo modo:

$$z = a + ib = \rho sen\theta + i\rho sen\theta = \rho(cos\theta + isen\theta)$$

Sappiamo quindi che $\rho > 0$ e inoltre consideriamo θ compreso tra $-\pi$ e π o tra 0 e 2π, includendo in ogni caso uno solo dei due estremi, a seconda del caso. L'angolo θ viene dettp ***argomento***, ***fase*** o ***angolo***.

Per passare dalla **forma trigonometrica alla forma algebrica** è sufficiente trovare i coefficienti a e b:

$$a = \rho cos\theta$$
$$b = \rho sen\theta$$

Per passare invece dalla **forma algebrica alla forma trigonometrica** bisogna trovare ρ e poi l'angolo θ:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$cos\theta = \frac{a}{\rho} \to \theta = arcos\frac{a}{\rho}$$
$$sen\theta = \frac{b}{\rho} \to \theta = arcsen\frac{b}{\rho}$$
$$tg\theta = \frac{b}{a} \to \theta = artg\frac{b}{a}$$

Nel trovare θ devo stare attento per capire quale risultato scegliere a seconda della posizione del numero nel piano di Gauss. Vediamo un esempio:

Esempio 4.2.

Consideriamo il numero $z = \sqrt{3} - i$ e trasformiamolo in forma algebrica:

$$\rho = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$\theta = arcos\frac{a}{\rho} = arcos\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ora devo far attenzione a scegliere l'intervallo giusto. Nel nostro caso z si trova nel quarto quadrante quindi scegliamo:

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$$

Il numero ottenuto è quindi:

$$z = 2\left(cos\frac{11}{6}\pi + isen\frac{11}{6}\pi\right)$$

4.5.1. Operazioni in forma trigonometrica

Il **prodotto tra numeri complessi** risulta molto più comodo in forma trigonometrica. Se infatti abbiamo due numeri:

$$z_1 = \rho_1(cos\theta_1 + isin\theta_1)$$
$$z_2 = \rho_2(cos\theta_2 + isin\theta_2)$$

Per calcolare il loro prodotto è sufficiente utilizzare la ***formula di De Moivre***:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1\rho_2[(cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2) + i(cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2)] \\ &= \rho_1\rho_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + isin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Notiamo quindi che stiamo ruotando di θ_2 e dilatando di ρ_2 il vettore z_1 nel piano di Gauss.

Stesso discorso possiamo fare per l'**elevamento a potenza**. Elevare un numero a potenza vuol dire:

$z^k = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{k\ volte}$

Riguardando il prodotto tra numero complessi otteniamo quindi che:

$z^k = \rho^k(cosk\theta + isenk\theta)$

Esempio 4.3.

$(1 + i)^7$

$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$

$z^7 = \sqrt{2}^7(\cos\frac{7}{4}\pi + isin\frac{7}{4}\pi) = 8\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi + isin\frac{7}{4}\pi)$

$a = 8\sqrt{2}\cos\left(\frac{4}{7}\pi\right) = 8\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = 8$

$b = 8\sqrt{2}\sin\left(\frac{4}{7}\pi\right) = 8\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -8$

$z^7 = 8 - 8i$

Esempio 4.4.

$z^3 - |z| = 0$

$z = \rho cos\theta + isen\theta$

$\rho^3(cos3\theta + isin3\theta) - \rho = 0$

$\rho^3(cos3\theta + isin3\theta) = \rho(cos0 + isin0)$

$\begin{cases} \rho^3 = \rho \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} con\ k \in \mathbb{Z}$

$$\rho(\rho^2-1)=0 f(x)=\begin{cases}\rho_1=0\\ \rho_2=1\\ \rho_3=-1 \quad non\ lo\ considero\end{cases}$$

$$\text{f(x)}=\begin{cases} z_1=0 \\ z_2=1(cos0+sen0), & \text{k}=0\\ z_3=1\left(cos\frac{2}{3}\pi\ +sen\frac{2}{3}\pi\right), & \text{k}=1\\ z=1\left(cos\frac{4}{3}\pi\ +sen\frac{4}{3}\pi\right), & \text{k}=2\end{cases}$$

Mi fermo a $k=2$ perché poi i risultati si ripetono.

4.5.2. Radici $n-esime$ di un numero complesso*

Grazie alla notazione trigonometrica è inoltre possibile calcolare le **radici $n-esime$** di un numero complesso. Per definizione diciamo che z è radice $n-esima$ di ω se $z^n=\omega$. Introduciamo quindi il **teorema di esistenza delle radici**:

Teorema 3.10 *Il **teorema di esistenza delle radici** afferma che, dato $\omega \in \mathbb{C}$ tale che ω sia non nullo e dat un $n \in N$ e $n \neq 0$, esistono esattamente n radici $n-esime$ di ω*

Dimostrazione 4.2

Hp: Sia $\omega \in \mathbb{C}: \omega \neq 0$
Sia $n \in \mathbb{N}: n \neq 0$

Th: esistono n radici $n-esime$ di ω

Per dimostrarlo iniziamo a scrivere la forma trigonometrica di $\boldsymbol{\omega}$:

$$\omega=\rho(cos\theta+isen\theta)$$

Ora consideriamo le radici di $\boldsymbol{\omega}$:

$$\sqrt[n]{\omega}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+isen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$$
$$con\ k=0,1,\dots,n-1$$

Se eleviamo a potenza $\boldsymbol{n-esima}$ ciò che abbiamo scritto sopra otteniamo:

$$\left(\sqrt[n]{\omega}\right)^n=\left(\sqrt[n]{\rho}\right)^n\left(cos\ n\frac{\theta+2k\pi}{n}+isen\,n\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$
$$=\rho(cos(\theta+2k\pi)+isen(\theta+2k\pi)$$

Poiché seno e coseno hanno periodo $\boldsymbol{2\pi}$ ciò è uguale a:	$= \rho(\cos\theta + i sen\theta)$

Notiamo quindi che se rappresentiamo le radici nel piano di Gauss troviamo che le radici esse stanno sui lati di un poligono regolare di n lati con raggio $\sqrt[n]{\rho}$.

Esempio 4.5.

$\sqrt[5]{1+i}$

$1+i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt[5]{1+i} = \sqrt[10]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5} + isen\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}\right) \quad con\ k = 0,\dots,4$

Esempio 4.6.

$z = \sqrt[5]{1+i} + 3 + i$

Per trovare z è sufficiente trovare le soluzioni di $z = \sqrt[5]{1+i}$ per poi traslarle di $3+i$.

4.6. Teorema fondamentale dell'algebra

Consideriamo il trinomio $ax^2 + bx + c = 0$. Quando si lavora in $\mathbb{C}$ le soluzioni dipendono dal discriminante. Infatti se:

- $b^2 - 4ac > 0$ il trinomio avrà due soluzioni $\in \mathbb{R}$ distinte
- $b^2 - 4ac = 0$ il trinomio avrà due soluzioni $\in \mathbb{R}$ coincidenti
- $b^2 - 4ac < 0$ il trinomio ottengo due soluzioni $\in \mathbb{C}$ distinte:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)(4ac-b^2)}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{i\sqrt{(4ac-b^2)}}{2a}$$

Si può generalizzare il concetto grazie al **teorema fondamentale dell'algebra**:

Teorema 3.11 *Considerando un qualsiasi polinomio di grado n del tipo:*

$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n = 0$

Esso ammette n soluzioni

In particolare possiamo dire che se i coefficienti a_i sono:

- **reali** allora le soluzioni saranno o reali o complesse coniugate
- **immaginari** non saranno coniugate

4.7. Formula di Eulero

Esiste anche un'altra notazione per scrivere i numeri complessi chiamata **forma esponenziale**. Consideriamo il numero z. Esso può essere scritto come:

$$z = \rho(\cos\theta + isen\theta) = \rho e^{i\theta}$$

Se consideriamo il prodotto tra due numeri complessi $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ otteniamo:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Discorso analogo possiamo fare per il rapporto tra due numeri complessi:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\theta 1}}{\rho_2 e^{i\theta 2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta 1-\theta 2)}$$

4.7.1. Seno e coseno non esistono

Il concetto di *sen* e *cos* derivano da ciò che abbiamo scritto sopra. Se infatti consideriamo che:

$$e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$$
$$e^{-i\theta} = cos\theta - isen\theta$$

Possiamo vedere che:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2cos\theta \rightarrow cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2isen\theta \rightarrow sen\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

Le due formule sopra scritte sono le definizioni della funzione *coseno* e della funzione *seno*. Un particolare caso della forma esponenziale è la cosiddetta **identità di Eulero**. Se al posto di di θ sostituiamo π otteniamo infatti:

$$e^{i\pi} = cos\pi + isen\pi = -1$$
$$e^{i\pi} = -1$$

Notiamo che quest'espressione contiene:

- 0 elemento neutro della somma e elemento tampone del prodotto

- 1 elemento neutro del prodotto
- π rapporto tra lunghezza della circonferenza e diametro
- i unità immaginaria
- e costante di Nepero fondamentale nello studio dei logaritmi

5. Funzioni reali

Riprendiamo il concetto di funzioni reali di variabile reale

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

L'insieme D viene detto *dominio*. La funzione è una legge che associa a ogni elemento di D uno e un solo elemento del codominio, in questo caso $\mathbb{R}$.

Le funzioni possono essere rappresentate graficamente: la formula $y = f(x)$ contiene x, la variabile indipendente, e y, la variabile dipendente. Nel piano cartesiano la funzione è un insieme di punti definito in questo modo:

$$\{(x, f(x)): x \in D\}$$

e definisce una linea che "non torna mai indietro", perché a ogni valore di x è associato uno e un solo valore di y.

Possiamo quindi dare un po' di definizioni riguardo alle funzioni. Si dice che una funzione è:

- **Limitata superiormente** se $\exists M: \forall x \in D, f(x) \leq M$
- **Limitata inferiormente** se $\exists M: \forall x \in D, f(x) \geq m$
- **Limitata** se $\exists m, M: \forall x \in D, m \leq f(x) \leq M$

Possiamo inoltre parlare delle *simmetrie delle funzioni*. Diciamo che una funzione è:

- **Pari** se $f(x) = f(-x)$. In questo caso la funzione è simmetrica rispetto all'asse y. Posso verificarlo tramite grafico oppure sostituendo la condizione (calcolo $f(-x)$ e lo comparo a $f(x)$)
- **Dispari** se $f(-x) = -f(x)$. In questo caso la funzione è simmetrica rispetto all'origine degli assi. Posso verificarlo tramite grafico oppure sostituendo la condizione (calcolo $f(-x)$ e lo comparo a $-f(x)$)
- **Né pari né dispari**: non soddisfa nessuna delle condizioni sopra elencate

(Notiamo che in nessun caso la funzione può essere simmetrica rispetto all'asse x altrimenti non sarebbe una funzione)

- **Periodica**: una funzione $f(x)$ non costante è periodica di periodo T (con $T > 0$) se T è il più piccolo valore di $\mathbb{R}^+$: $f(x + T) = f(x)\ \forall x \in D$. E' importante che T sia il più piccolo perché il periodo è unico, altrimenti potremmo trovare infiniti periodi multipli di T (il fatto che $T > 0$ serve per definire in modo univoco e corretto il periodo).

- **Monotòna**: può essere
  - **Crescente** (o **non decrescente**) se $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
  - **Strettamente crescente** se $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  - **Decrescente** (o **non crescente**) se $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
  - **Strettamente decrescente**: $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

5.1. Funzioni composte

Se considero due funzioni:

$$f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g: F \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Tale che $f(x) \in F\ \forall x \in E$. La **funzione composta** è:

$$g(f(x)) \qquad \text{o} \qquad g \cdot f(x)$$

Notare che $g \cdot f \neq f \cdot g$

Esempio 5.1.

Se considero

$f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$

Le composizioni sono

$f\big(g(x)\big) = x$ con $D = \mathbb{R}^+$

$g\big(f(x)\big) = x$ con $D = \mathbb{R}$

Le due composizioni quindi differiscono per il dominio.

5.2. Funzioni inverse

Se considero una funzione $y = f(x)$, definiamo **funzione inversa** $f^{-1}(x)$ la funzione che dato il valore y mi resituisce x. Essendo una funzione devono valere le regole base delle funzioni.

Quando è possibile trovare la funzione inversa di $f(x)$ si dice che $f(x)$ è *invertibile*, altrimenti si dice che *non è invertibile*. Ci sono alcune caratteristiche che ci permettono di determinare se una funzione è invertibile.

Possiamo dire che una funzione $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile se:

- $\forall x_1, x_2 \in D: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

- $\forall x_1, x_2 \in D: x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
- $\forall y \in Codominio\ di\ f, \exists! \, x \in D: f(x) = y$

Ci sono inoltre alcuni casi in cui la funzione è sicuramente non invertibile. Una funzione non è invertibile se:

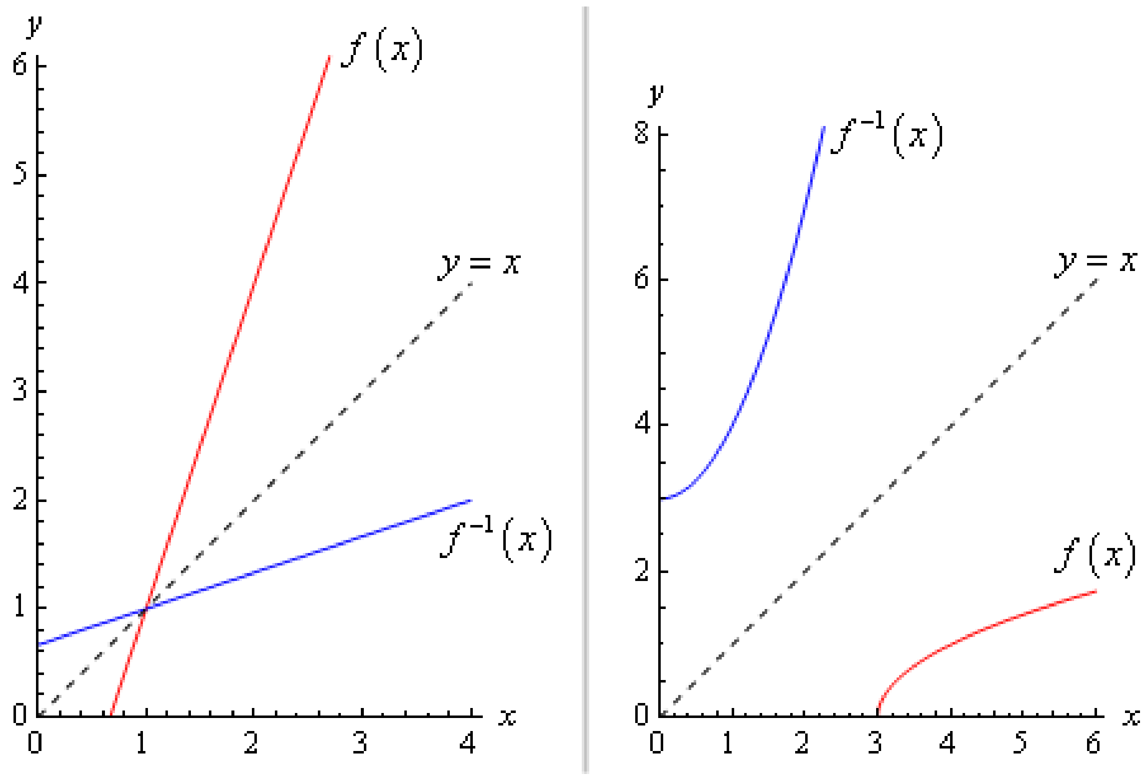
- **è pari**, infatti per le funzioni pari vale $f(x_0) = f(-x_0)$
- **è periodica**, infatti per definizione $f(x_0 + T) = f(x_0)$

Se $f(x)$ è **strettamente monotona** allora è invertibile e $f^{-1}(x)$ è strettamente monotona. Possiamo dimostrare che una funzione strettamente monotona è invertibile: la monotonia stretta significa infatti che:

$$\forall x_1, x_2: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

La disuguaglianza stretta ($<$ e $>$) è un caso particolare di $\neq$.

Per trovare il grafico dell'inverso di una funzione invertibile è sufficiente tracciare la simmetria del grafico della funzione rispetto alla retta bisettrice del 1° e 3° quadrante $y = x$.



In alcuni casi risulta utile trovare l'inverso di funzioni *non invertibili*. Per farlo bisogna restringere il dominio in modo che nel dominio ristretto la funzioni rispetti soddisfi le proprietà sopra elencate.

Esempio 5.2.

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = x^2$$

Essa non è invertibile perché $f^{-1}(x)$ sarebbe $\pm\sqrt{y}$ che non è una funzione. Possiamo tuttavia restringere il dominio a $D: x \geq 0$ e trovare l'inverso nel nuovo dominio.

Esempio 5.3.

Consideriamo le funzioni:

$$f(x) = senx$$
$$f(x) = cosx$$

Entrambe non sono invertibili perché periodiche. Però possiamo trovare un dominio per il quale le funzioni siano invertibili:

per $f(x) = senx$ possiamo considerare il dominio $D: -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ e definire $f^{-1}(x) = arcsenx$

per $f(x) = senx$ possiamo considerare il dominio $D: 0 \leq x \leq \pi$ e definire $f^{-1}(x) = arcosx$

5.3. Limiti delle funzioni

Abbiamo precedentemente parlato di limiti delle successioni. Per quanto riguarda le funzioni esistono due modi per definire il limite:

- **Definizione successionale**
- **Definizione topologica**

5.3.1. Definizione successionale

Introduciamo la *definizione successionale* di limite della funzione:

Consideriamo un intervallo $I \in D$, un punto $c \in D$ e una funzione $f(x)$ tale che:

- $f(x)$ sia definita in I (salvo al più il punto c)
- I sia limitato o illimitato
- C sia interno a I o un estremo di I

Prendiamo ora una successione $\{x_n\}$ con:

- $n \in \mathbb{N}$
- $\{x_n\} \in I$
- $x_n \neq c$

- $\lim_{n\to\infty} x_n = c$

Associamo ora a ogni n un valore di $\{f(x_n)\}$. Se per ogni scelta di $\{x_n\}$ che rispetta le condizioni, n ha:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x) = l$$

Questo tipo di definizione è molto vantaggiosa perché ci permette di usare le dimostrazioni utilizzate per le successioni per dimostrare i teoremi relativi ai limiti delle funzioni. Ad il **teorema di unicità del limite** possiamo dimostrarlo in questo modo:

Dimostrazione 5.1

Hp:	Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\lim_{x\to c} f(x) = l$
Th:	l è unico
Per dimostrarlo procediamo per assurdo e consideriamo i limiti:	$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l_1$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l_2$ $l_1 \neq l_2$
Abbiamo già dimostrato che ciò è assurdo per le successioni, il teorema è quindi valido anche per le funzioni:	l è unico

5.3.2. Limiti ai bordi del dominio

Quando dobbiamo studiare il comportamento di una funzione, ha senso calcolare i limiti del dominio. Se ad esempio ho una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ho i seguenti casi:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l \to l \in \mathbb{R}$$

Allora dico che la funzione **ha un asintoto orizzontale**. L'asintoto è una retta a cui la funzione si avvicina senza mai toccarla. Nel caso di asintoto orizzontale l'equazione della retta è $y = l$. Come per le successioni $f(x)$ può avvicinarsi a l *per eccesso* (da sopra), *per difetto* (da sotto) o né da sopra né da sotto.

Se invece ho:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

esiste un caso particolare per cui $f(x)$ **ha un asintoto obliquo** di equazione $r: y = mx + q$ con $m \neq 0$ e $q \in \mathbb{R}$. Se $f(x)$ è asintotica alla retta r vuol dire che per $x \to \pm\infty$ la differenza di tra la funzione e la retta tende a 0:

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx + q) = 0$$

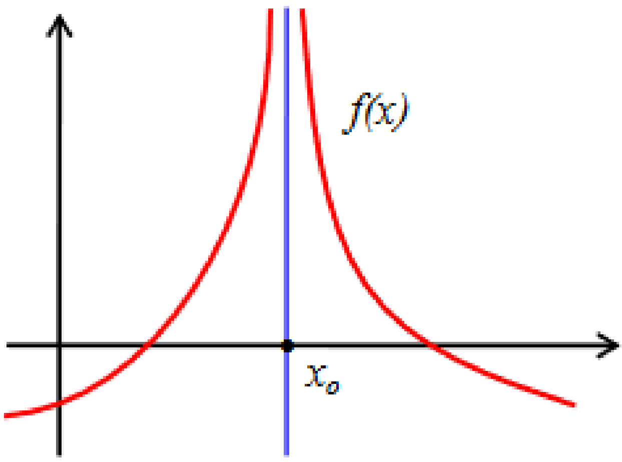
Per trovare m e q uso le seguenti formule:

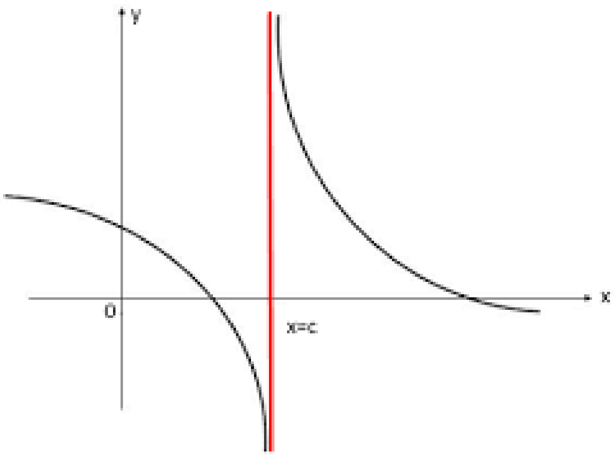
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$$

Per poter affermare che $f(x)$ abbia un asintoto obliquo devono esistere entrambi i limiti sopra elencati.

Se invece ho:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$$





Nel secondo caso in teoria il limite non esiste ma possiamo introdurre il concetto di limite destro e limite sinistro:

$$limite\ sinistro \to \lim_{x\to c^-} f(x)$$
$$limite\ destro \to \lim_{x\to c^+} f(x)$$

Viene quindi chiamato **asintoto verticale** la retta $x = c$.

5.3.3. Funzioni continue

Abbiamo elencato alcuni casi di limite agli estremi del dominio. L'unico che non abbiamo ancora elencato è quello per cui:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \quad \text{con } c, l \in \mathbb{R}$$

Questa scrittura rappresenta due casi:

- Una funzione per cui $f(c) = l$
- Una funzione per cui $f(c) \neq l$. In questo caso posso studiare grazie ai limiti il comportamento della funzione per $x \to c$.

Consideriamo la funzione $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e un $c \in I$. Diciamo che $f(x)$ è **continua** in c se vale che:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Con questa scrittura stiamo dicendo che il limite della funzione per $x \to c$ esiste, è finito e coincide con il valore della funzione in c. Posso riscriverlo come:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c) = \lim_{x \to c^-} f(x)$$

La definizione appena scritta è detta **puntuale**, ossia vale per un punto. Possiamo estendere la definizione puntuale a un intervallo dicendo che $f(x)$ è continua in A (con A intervallo, insieme di intervalli, ecc.) se $f(x)$ è continua $\forall x \in A$.

5.3.4. Discontinuità delle funzioni

Nel secondo caso, in cui $f(c) \neq l$, si dice che la funzione presenta un punto di discontinuità. Esistono tre tipi di discontinuità:

- **I Specie** (o **a salto finito**) quando
$$\exists finito \lim_{x \to c^+} f(x), \lim_{x \to c^-} f(x): \lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^-} f(x)$$
In questo caso $f(c)$ può non esistere, o essere uguale a l_1 o l_2. Se il limite da destra/sinistra è uguale a $f(c)$ dico che la funzione è continua da destra/sinistra
- **II Specie** quando
$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty \text{ e/o } \lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$$
ossia o da destra, o da sinistra, o da tutte due le parti la funzione presenta un asintoto verticale.
- **III Specie** (o **eliminabile**) quando
$$\exists\ finito \lim_{x \to c} f(x) \text{ ma } \lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$$
Posso avere casi in cui $f(c)$ ha un altro valore o non esiste. Si chiama eliminabile perché posso definire una nuova funzione che assume valore l in c.

5.3.5. Definizione topologica di limite

Introduciamo ora l'altra definizione di limite di una funzione, ossia quella topologica. Per comprenderla introduciamo il concetto di intorno di un punto:

Definizione 5.1. *Un intorno di un punto x_0 è un intervallo aperto che contiene x_0. Ad esempio: $(x_0 - h, x_0 + k)$. Si definisce intervallo simmetrico un intervallo del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

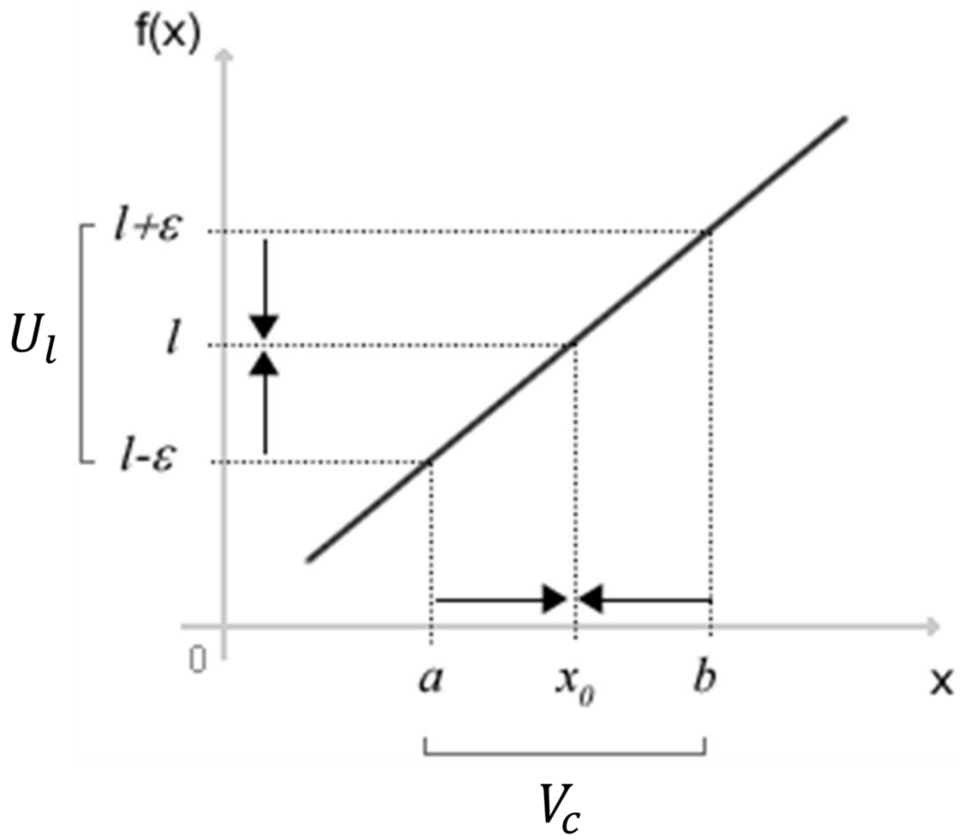
Diciamo che una funzione ha una proprietà assunta definitivamente per $x \to c$ se esiste un intorno U del punto c tale che la proprietà valga all'interno dell'intorno, escluso l più il punto c $(\forall x \in U, x \neq c)$.

Detto ciò possiamo proseguire con la definizione:

Definizione 5.2. *Diciamo che una funzione ha:*

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \quad con\ c, l \in \mathbb{R}$$

se per ogni intorno U_l esiste un intorno V_c: $\forall x \in V_c,\ x \neq c \Rightarrow f(x) \in U_l$



Possiamo quindi separare i casi:

- con $c, l \in \mathbb{R}$ finiti deve valere

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \neq c, |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- con c finito e l infinito deve valere

$$\forall k > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \neq c, |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x)| > k$$

- con c infinito e l finito deve valere

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists h > 0 : \forall |x| > h \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- con c, l infiniti deve valere

$$\forall k > 0\ \exists h > 0 : \forall |x| > h \Rightarrow |f(x)| > k$$

5.3.6. Forme di indeterminazione

Come per le successioni, nel calcolo dei limiti può capitare di incontrare forme di indeterminazione. In alcuni casi posso trovare o posso ricondurmi ai *limiti notevoli*. Sono:

- $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$ che posso anche scrivere come $\lim_{x \to 0} \frac{1-cosx}{\frac{x^2}{2}} = 1$
- $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ da cui derivano: $\begin{cases} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \end{cases}$

(i limiti notevoli possono essere generalizzati sostituendo $f(x)$ al posto di x)

Quando abbiamo il limite di un rapporto uguale a 1 diciamo che la funzione al numeratore e quella al denominatore sono **asintotiche** per $x \to x_0$, ossia hanno lo stesso comportamento per $x \to x_0$. Si indica:

$$f(x) \sim g(x)$$

5.3.7. Teoremi sui limiti

Avendo definito i limiti in modo successionale, come detto prima, possiamo limitarci a enunciare i teoremi di cui abbiamo già dimostrato la validità:

Teorema 5.1	***Teorema del confronto***
Hp:	$\lim_{x \to c} f(x) = l$ $\lim_{x \to c} g(x) = l$ Valga $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to c$
Th:	$\lim_{x \to c} h(x) = l$

Teorema 5.2	***Primo corollario del teorema del confronto***
Hp:	$\lim_{x \to c} f(x) = 0$ Valga $\lvert h(x) \rvert \leq f(x)$ definitivamente per $x \to c$
Th:	$\lim_{x \to c} h(x) = 0$

Teorema 5.3	***Secondo corollario del teorema del confronto***
Hp:	$\lim_{x \to c} f(x) = 0$ Valga che $g(x)$ sia definitivamente limitata per $x \to c$
Th:	$\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = 0$

Teorema 5.4	***Prima forma del teorema di permanenza del segno***
Hp:	$\lim_{x \to c} f(x) = l$ $l > 0$
Th:	$f(x) > 0$ definitivamente per $x \to c$

Teorema 5.5	***Seconda forma del teorema di permanenza del segno***
Hp:	Valga $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \to c$ $\lim_{x \to c} f(x) = l$

Th:	$l \geq 0$

Teorema 5.6	***Teorema di permanenza del segno per funzioni continue***
Hp:	Sia $f(x)$ continua in $x = c$ Sia $f(c) > 0$
Th:	Vale $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to c$

Possiamo in conclusione aggiungere che valgono le **stesse proprietà delle successioni**:

- Algebra dei limiti
- Aritmetizzazione parziale del simbolo ∞
- Gerarchia degli infiniti e infinitesimi

5.3.8. Funzioni asintotiche

Abbiamo già introdotto il concetto di funzioni asintotiche: due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si dicono asintotiche per $x \to c$ se:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Si indica che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to c$ con $c \in \mathbb{R}^*$.

Quando diciamo che due funzioni sono asintotiche stiamo sottointendendo che in $x = c$:

- hanno la stessa y
- hanno la stessa pendenza

Possiamo generalizzare il caso scritto sopra scrivendo $f\big(\varepsilon(x)\big) \sim g\big(\varepsilon(x)\big)$ per $\varepsilon \to c$.

Esempio 5.4.

Consideriamo le seguenti funzioni:

$\ln(1 + 2x) \sim \frac{3}{2}\sin(3x) \qquad per\ x \to 0$

Calcolando il rapporto dei limiti ottengo che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\frac{3}{2}\operatorname{sen}(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\frac{3}{2}\operatorname{sen}(3x)}\frac{\frac{1}{2x}}{\frac{1}{3x}}\frac{2}{3}=1$$

L'esercizio può anche essere svolto, sostituendo al posto delle funzioni quelle asintotiche per $x \to 0$

$$\ln(1+2x) \sim 2x$$
$$\frac{3}{2}sen(3x) \sim \frac{2}{3}3x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{2}{3}3x}=1$$

In questo tipo di sostituzioni <u>bisogna stare attenti</u>. Nel caso di differenze di funzioni, come ad esempio:

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx - x}{senx - tgx}$$

Sostiuendo a $senx$ la funzione asintotica x ($senx \sim x$) si ottiene $x - x$, considerando nulla una funzione che in verità è infinitesima.

Quando parliamo di funzioni **asintotiche all'infinito** intendiamo funzioni che hanno lo stesso andamento per $x \to \pm\infty$, sia nel caso in cui limite sia finito sia nel caso in cui il limite sia infinito.

5.4. Proprietà funzioni continue

Elenchiamo ora alcune proprietà fondamentali delle funzioni continue. Se prendiamo due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite almeno in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ e continue in x_0, le loro **combinazioni sono continue**:

- $f(x) \pm g(x)$ è continua in x_0
- $f(x)g(x)$ è continua in x_0
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ è continua in x_0 con $g(x_0) \neq 0$

Dimostriamo l'ultimo punto:

Dimostrazione 5.2

Poiché le funzioni sono continue possiamo scrivere:	$\lim_{n\to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\lim_{n\to x_0} g(x) = g(x_0)$
Per il teorema di permanenza del segno possiamo dire che:	$g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0
Possiamo quindi scrivere che:	$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$

5.4.1. Teorema di cambio di variabile

Introduciamo un teorema importante per le funzioni: il **teorema di cambio di variabile**:

Teorema 5.7 *Il **teorema di cambio di variabile** afferma che: siano f e g due funzioni tali che la loro composizione $f \cdot g$ sia ben definita in un intorno di x_0, che $\lim_{x\to x_0} g(x) = t_0$ e che $\lim_{t\to t_0} f(t) = l \in \mathbb{R}^*$, allora esiste $\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = l$*

Dimostrazione 5.3

Hp:	Siano f, g due funzioni Sia $f \cdot g$ ben definita in un intorno di x_0 $\lim_{x\to x_0} g(x) = t_0$ $\lim_{t\to t_0} f(t) = l \in \mathbb{R}^*$
Th:	$\exists \lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = l$
Costruiamo una successione $\{\boldsymbol{x_n}\}$ tale che:	$\lim_{n\to +\infty} x_n = x_0$

Poiché per ipotesi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = t_0$ possiamo scrivere che:	$\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = t_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t_0$
Poiché per ipotesi $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = l$ possiamo scrivere che:	$\lim\limits_{n\to+\infty} f\big(g(x_n)\big) = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n) = l$

5.4.2. Teorema di continuità della funzione composta

Intoroduciamo e dimostriamo il **teorema di continuità della funzione composta:**

Teorema 5.8 *Il **teorema di continuità della funzione composta** afferma che: sia $g(x)$ una funzione definita in almeno un intorno di x_0 e continua in x_0, sia $f(t)$ un'altra funzione definita in un intorno di $t_0 = g(x_0)$ e continua in t_0. Allora $f\big(g(x_0)\big)$ è definita in un intorno di x_0 e continua in x_0*

Dimostrazione 5.4	
Hp:	Sia $g(x)$ una funzione definita in un intorno di x_0 continua in x_0 Sia $f(t)$ una funzione definita in un intorno di $t_0 = g(x_0)$ e continua in t_0
Th:	$f(g(x_0))$ è definita in un intorno di x_0 e continua in x_0
Essendo $g(x)$ continua in x_0 possiamo scrivere:	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$
Quindi:	$\underbrace{\lim\limits_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = \lim\limits_{x\to t_0} f(t)}_{teorema\ cambio\ variabile} = \underbrace{f(t_0)}_{continua} = f\big(g(x_0)\big)$

5.4.3. Teorema degli zeri*

Di particolare importanza è il **teorema degli zeri**:

Teorema 5.9 *Il **teorema degli zeri** afferma che: sia f una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ e sia $f(a) \cdot f(b) < 0$ (siano $f(a)$ e $f(b)$ discordi), allora sicuramente esiste un $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$*

Dimostrazione 5.5

Hp: Sia f continua su $[a, b]$
$f(a) \cdot f(b) < 0$

Th: $\exists c \in (a, b): f(c) = 0$

Per dimostrare questo teorema procediamo per dicotomia, ossia dividiamo continuamente l'intervallo a metà. Dopo la prima divisione avremo due intervalli $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ e $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}]$. Se $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$ abbiamo dimostrato il teorema, altrimenti possiamo dire che solo una delle due disequazioni sarà vera:

$$\boldsymbol{f(a) \cdot f(c) < 0}$$
$$\boldsymbol{f(c) \cdot f(b) < 0}$$

Scegliamo una delle due e ripetiamo ottenendo intervalli $[\boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{b_n}]$ che avranno queste proprietà:

- $\boldsymbol{a_n \leq a_{n+1}} \rightarrow \{\boldsymbol{a_n}\}$ monotona crescente e superiormente limitata converge a $\boldsymbol{l_1}$
- $\boldsymbol{b_n \geq b_{n+1}} \rightarrow \{\boldsymbol{b_n}\}$ monotona decrescente e inferiormente limitata converge a $\boldsymbol{l_2}$
- $\boldsymbol{b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n - a_n}{2} = 0 \Rightarrow l_2 - l_1 = 0 \Rightarrow l_2 = l_1 = l}$
- $\boldsymbol{f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \rightarrow f(a_n) \cdot f(b_n) = [f(l)]^2 \rightarrow \underbrace{[f(l)]^2 \leq 0}_{\substack{\text{teorema di} \\ \text{permanenza} \\ \text{del segno}}} \rightarrow f(l) = 0}$

5.4.4. Teorema di Weierstrass

Un altro teorema fondamentale è il **teorema di Weierstrass**:

Teorema 5.10 *Il **teorema di Weierstrass** afferma che: data una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua nell'intervallo, f assume il minino e il massimo in $[a, b]$*

Dimostrazione 5.6

Hp: Sia $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$

Th: f assume min e max in $[a,b]$ ossia:

$$\exists \underbrace{x_m}_{\substack{punto\ di\\ minimo}} , \underbrace{x_M}_{\substack{punto\ di\\ massimo}} \in [a,b]: \forall x \in [a,b], \underbrace{f(x_m)}_{min} \le f(x) \le \underbrace{f(x_M)}_{massimo}$$

Per dimostrare il teorema dobbiamo fare alcune premesse:

$$Sup(E_1 \cup E_2) = max(SupE_1, SupE_2)$$
$$f: I \to \mathbb{R}$$
$$I = I_1 \cup I_2$$
$$Sup_I f = max\left(Sup_{I_1} f, Sup_{I_2} f\right)$$

Quindi possiamo dire che almeno una tra le seguenti equazioni è vera:

$$Sup_I f = Sup_{I_1} f$$
$$Sup_I f = Sup_{I_2} f$$

Possiamo quindi continuare la dimostrazione: Consideriamo $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{Sup_{[a,b]} f}$ con $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^*$. Procediamo per dicotomia trovando $\boldsymbol{n}$ intervalli $[\boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{b_n}]$ tali che:

$$a_n \le a_{n+1} \to \{a_n\}$$
$$b_n \ge b_{n+1} \to \{b_n\}$$
$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Posso dire che $\boldsymbol{Sup_{[a_n,b_n]} f} = \boldsymbol{\Lambda}$. Ho due casi, $\boldsymbol{\Lambda}$ può essere:

Finito:

In questo caso per definizione di estremo superiore possiamo scrivere (ricordiamo che $\boldsymbol{\Lambda}$ è il minore dei maggioranti):

$$\forall m\ \exists t_m \in [a,b]: \Lambda - \frac{1}{m} < f(t_m) \le \Lambda \to \forall [a_n, b_n]$$
$$\Lambda - \frac{1}{m} < f(t_m) \le \Lambda$$
$$\lim_{m\to\infty} f(t_m) = \Lambda \to \lim_{m\to\infty} f(t_m) = f(x_0)$$

Infinito

In questo caso giungiamo a una conclusione che contraddice l'ipotesi di continuità:

$$\forall m \exists t_m \in [a,b]: f(t_m) \ge \Lambda \to \forall [a_n, b_n]$$
$$\lim_{m\to\infty} f(t_m) = \Lambda$$

Il teorema è quindi dimostrato per il *massimo* e può analogamente essere dimostrato per il *minimo*.

5.4.5. Teorema dei valori intermedi

Dimostriamo il **teorema dei valori** intermedi:

Teorema 5.11 *Il **teorema dei valori intermedi** afferma che: sia f una funzione continua sull'intervallo $[a,b]$, allora per ogni $\lambda \in (m,M)$:*

$$\exists x_0 \in [a,b]: f(x_0) = \lambda$$

Dimostrazione 5.7

Hp:	Sia $f[a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ Sia λ un valore $\in (m,M)$
Th:	$f \exists x_0 \in [a,b]: f(x_0) = \lambda$
Iniziamo col dire che il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ tali che:	$f(x_1) = M$ $f(x_2) = m$
Possiamo quindi definire una nuova funzione:	$g(x) = f(x) - \lambda$
Siamo sicuri che la funzione $\boldsymbol{g(x)}$ rispetta il teorema deli zeri perché tra $[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}]$ o $[\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_1}]$:	- È continua (differenza tra una funzione continua per ipotesi e una funzione costante) - $g(x_1) = M - \lambda > 0$ - $g(x_2) = m - \lambda < 0$
Possiamo quindi affermare che:	$\exists x_0 \in [x_1, x_2]$ o $[x_2, x_1] \subseteq [a,b]$: $g(x_0) = 0 \to f(x_0) = \lambda$

5.4.6. Teorema di monotonia

Teorema 5.12 *Il **teorema di monotonia** afferma che: sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona, per ogni $c \in (a,b)$ posso affermare che esistono $\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x) \in \mathbb{R}^*$ e che esistono finiti:*

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \qquad e \qquad \lim_{x\to c^+} f(x)$$

Teorema di invertibilità

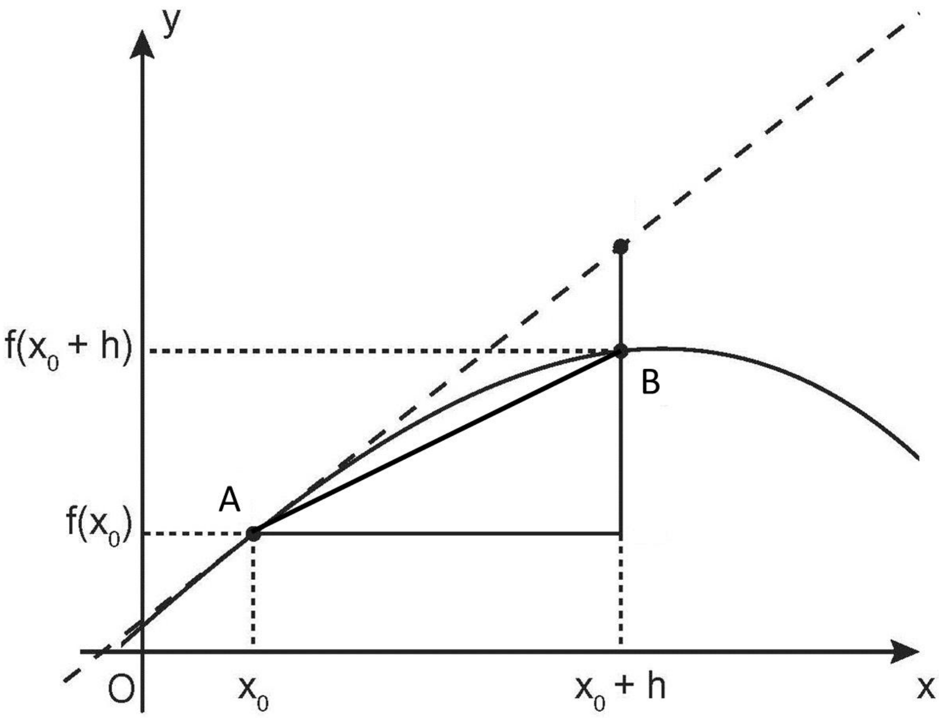
Teorema 5.13 *Il **teorema di invertibilità** afferma che: Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su I, allora posso affermare che f è invertibile se e solo se è strettamente monotona.*

Si può inoltre aggiungere che f^{-1} è strettamente monotona

5.5. Derivate delle funzioni

Consideriamo una funzione $f(x)$ continua in x_0 con $f(x_0) = A$. Spostiamoci di una distanza h da x_0 ottendendo $f(x_0 + h) = B$. Possiamo dire che la retta AB ha coefficiente:

$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Ciò viene detto **rapporto incrementale** e descrive la pendenza complessiva della funzione nel tratto AB. Se riduciamo il valore di h, la pendenza della retta si avvicina alla pendenza locale della funzione, ossia la retta si avvicina alla tangente delle funzione in quel punto. In termini matematici:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Diciamo quindi che $f(x)$ **è derivabile in** x_0 se il limite sopra scritto esiste ed è finito. La notazione per indicare la derivata di una funzione in un punto è:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La derivata ci consente quindi di trovare l'equazione della retta tangente a una funzione in un punto x_0:

$$y = f'(x_0)x + q$$

Possiamo estendere il concetto di derivabilità di una funzione a un intervallo tramite la **definizione puntuale** di funzione derivabile in un intervallo:

Definizione 5.3. *Data una funzione f, diciamo che essa è derivabile nell'intervallo I se è derivabile per ogni $x \in I$*

5.6. Funzione derivata

Possiamo quindi definire una funzione che data una funzione resituisca il valore della derivata in ogni punto in cui la funzione è derivabile, la **funzione derivata**. Possiamo inoltre aggiungere che quando la derivata è a sua volta derivabile, se la rideriviamo otteniamo la *derivata seconda*, se rideriviamo la derivata seconda otteniamo la *derivata terza* e così via. La notazione per indicarle è:

$$f(x) \to f^{I}(x) \to f^{II}(x) \to f^{III}(x) \to f^{IV}(x)$$

Un altro modo per scrivere la derivata di una funzione in x_0 è:

$$Df(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$$

In cui $\boldsymbol{df}$ è la **variazione infinitesima di $\boldsymbol{f}$** e $\boldsymbol{dx}$ è la **variazione infinitesima di $\boldsymbol{x}$** nel punto x_0. La derivata seconda viene indicata con:

$$D^{II}f(x_0) = \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x_0}$$

5.7. Derivate notevoli

Possiamo a questo punto introdurre le derivate di alcune funzioni importanti:

- **Derivata della funzione costante**
  Se consideriamo una funzione costante $y = k$ la sua derivata è:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

- **Derivata di x^α**
  Consideriamo la funzione x^α

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\binom{\alpha}{0} x^\alpha + \binom{\alpha}{1} x^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{2} x^{\alpha-2} h^2 + \cdots - x^\alpha}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left[\binom{\alpha}{1} x^{\alpha-1} + \overbrace{\binom{\alpha}{2} x^{\alpha-2} h^1 + \cdots}^{0}\right]}{h} = \alpha x^{\alpha-1}$$

  Abbiamo dimostrato per α intero, ma si può dimostrare per qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$

- **Derivata di *senx***
  Consideriamo la funzione *senx*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - sinx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}x cosh + senhcosx - senx}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[senx \frac{cosh - 1}{h} + cosx \frac{senh}{h}\right] = \lim_{h\to 0} \left[senx \underbrace{\underbrace{\frac{cosh-1}{h^2}}_{\to\frac{1}{2}} h}_{\to 0} + cosx \underbrace{\frac{senh}{h}}_{\to 1} \right]$$

$$= cosx$$

- **Derivata di *cosx* e *tanx***
  Senza dimostrarlo possiamo dire che:

$$D'(cosx) = -senx$$

$$D'(tanx) = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

5.8. Operazioni con le derivate

5.8.1. Derivata della somma

Abbiamo parlato di funzioni derivabili in intervalli enunciando la *definizione puntuale* di funzione derivabile. Se combiniamo funzioni derivabili otteniamo funzioni a loro volta derivabili. Se infatti consideriamo due funzioni $f, g: (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilli in (a, b) allora possiamo dire che:

$f(x) \pm g(x)$ è derivabile in (a, b), in particolre che **la derivata della somma/differenza è uguale alla somma/differenza delle derivate**:

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

La dimostrazione è semplice:

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) \pm g(x+h)] - [f(x) \pm g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{[f(x+h) - f(x)]}{h}}_{f'(x)} \pm \underbrace{\frac{[g(x+h) - g(x)]}{h}}_{g'(x)} = f'(x) \pm g'(x) \end{aligned}$$

5.8.2. Derivata del prodotto

Possiamo inoltre dire che il prodotto di funzioni derivabili $f(x) \cdot g(x)$ è derivabile in (a, b), in particolare che:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Dimostriamolo usando la definizione di derivata:

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)g(x+h)] - [f(x)g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)g(x+h)] - [f(x)g(x)] + f(x+h)g(x) - f(x+h)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)g(x+h)] - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - [f(x)g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[f(x+h) \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} + g(x) \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} \right] \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

Possiamo generalizzare la derivata del prodotto a n fattori grazie alla **formula di Leibnitz**:

$$[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)]' = f'_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) + f_1(x) \cdot f'_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) + \cdots + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f'_n(x)$$

5.8.3. Derivata del rapporto

Il rapporto di funzioni derivabili $\frac{f(x)}{g(x)}$ è anch'esso derivabile in (a, b), in particolre:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

5.8.4. Derivata della funzione composta

Esiste un teorema che dice:

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in x_0 e $g(y)$ una funzione derivabile in $y_0 = f(x_0)$, allora la funzione composta $g\big(f(x)\big)$ è a sua volta derivabile in x_0, in particolare:

$$D'\big[g\big(f(x)\big)\big] = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)$$

Esempio 5.5.

Se consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = e^{senx}$ la sua derivata è:

$$f'(x) = e^{senx}cosx$$

Esempio 5.6.

Se mi trovo nel caso di dover derivare:

$$f(x)^{g(x)}$$

Devo ricordarmi che:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\ln\left(f(x)\right)}$$

Quindi la derivata sarà uguale a:

$$D\left(f(x)^{g(x)}\right) = e^{g(x)\ln\left(f(x)\right)} \cdot D\big[g(x)\ln\big(f(x)\big)\big] = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x)\ln\big(f(x)\big) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right]$$

5.9. Derivata della funzione inversa

Consideriamo la funzione $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ continua e invertibile tale che esista $f'(x_0) \neq 0$ con $x_0 \in [a, b]$. Chiamiamo $g(y)$ la funzione inversa di $f(x)$. Allora possiamo dire che:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Possiamo interpretare ciò che abbiamo scritto graficamente. Abbiamo definito derivata come il coefficiente della retta tangente della funzione in un punto, quindi possiamo scrivere:

$$f'(x_0) = tan\alpha$$
$$g'(y_0) = tan\beta$$

Con:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$
$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Posiamo quindi scrivere:

$$tan\beta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{sen\frac{\pi}{2}cos\alpha - \cos\frac{\pi}{2}sen\alpha}{cos\frac{\pi}{2}cos\alpha - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}sen\alpha} = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{tan\alpha}$$

Che conferma ciò che abbiamo scritto sopra.

5.10. Deriviabilità e continuità

Poiché abbiamo definito il concetto di derivata a partire dal concetto di continuità possiamo dire che:

Se una funzione è derivabile ⇒ è continua

Quando una funzione è derivabile è quindi sicuramente continua. Quando una funzione è continua invece possiamo chiederci se è derivabile. I punti di una funzione continua per i quali non esiste la derivata sono detti **punti di non derivabilità** e si possono classificare. Si dice che in un punto di non derivabilità la funzione presenta:

- Un **punto angoloso** se esistono finiti:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_1$$
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_2$$

Con $l_1 \neq l_2$. La funzione quindi presenta in x_0 un angolo

- Un **punto di flesso a tangente verticale** (si parla di flesso quando la funzione taglia la sua retta tangente) se esistono limite destro e sinistro sono infiniti di stesso segno:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty$$
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty$$

- Una **cuspide** se esistono limite destro e limite sinistri infiniti di segno opposto:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty$$
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\mp\infty$$

Se la funzione non è continua non ci interessa trovare il limite perché siamo sicuri non esiste. Se una funzione è continua invece possiamo notare che deve valere:

$$\lim_{h\to 0^+}f(x_0+h)=f(x_0)\to\lim_{h\to 0^+}[f(x_0+h)-f(x_0)]$$

Questa è anche una condizione fondamentale per la derivabilità della funzione:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\to 0}}{\underbrace{h}_{\to 0}}$$

Se il denominatore non tendesse a 0 il limite sarebbe uguale a ∞. La condizione di continuità è quindi una condizione necessaria perché la funzione sia derivabile.

5.11. Ottimizzazione delle funzioni*

Con ottimizzazione si intende la ricerca dei massimi e dei minimi di una funzione.

Definizione Si dice che M è un massimo globale di una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $x_0\in\{a,b]$ è un punto di massimo globale se $\forall x\in[a,b],\ f(x_o)=M\geq f(x)$

Definizione Si dice che M è un massimo locale o relativo se esiste un intorno di x_0 tale che $\forall x\in intorno\in[a,b],\ M=f(x_0)\geq f(x)$

Possiamo quindi dire che il massimo globale è il più alto dei massimi locali. Grazie al concetto di derivata possiamo trovare massimi e minimi di funzioni continue, continue ma non derivabili, discontinue. Per trovare il massimo di una funzione ci appoggiamo al **teorema di Fermat**, applicabile solo in caso di derivabilità della funzione.

Teorema 5.14 *Il **teorema di Fermat** afferma che: sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b) e sia x_0 un punto di estremante locale, allora possiamo dire che $f'(x_0) = 0$*

Dimostriamo per $\boldsymbol{x_0}$ punto di massimante locale.

Dimostrazione 5.8

Hp:	Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile in (a, b) Sia x_0 un punto di estremante locale
Th:	$f'(x_0) = 0$
Consideriamo un $\boldsymbol{x_1}$ in un intorno di $\boldsymbol{x_0}$. Essendo $\boldsymbol{x_0}$ un punto di massimo locale possiamo dire che:	$f(x_1) \leq f(x_0)$
- Se $\boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_0}$ allora possiamo dire che:	$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$ $\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$
- Se $\boldsymbol{x_1} > \boldsymbol{x_0}$ allora possiamo dire che:	$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq 0$ $\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq 0$
Abbiamo quindi scritto che:	$\boldsymbol{f'_-(x_0) \geq 0}$ e $\boldsymbol{f'_+(x_0) \leq 0}$

Essendo la funzione derivabile per ipotesi, limite destro e limite sinistro devono essere uguali:	$f'(x_0) = 0$

Non è detto che se in un punto x_0 la derivata $f(x_0) = 0$ la funzione presenti un estremante locale. Esiste infatti il caso in cui la funzione presenta un punto di flesso a tangente orizzontale. In generale chiamiamo un punto di una funzione con derivata nulla **punto stazionario**. Per capire se in un punto stazionario la funzione presenta un massimo, un minimo o un punto di flesso studiamo il segno della derivata ponendo $f'(x) \geq 0$.

5.12. Teorema di Lagrange*

Teorema 5.15 *Il **teorema di Lagrange** afferma che, considerata una funzione continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a, b), Allora $\exists c \in (a, b): f'(c) = \frac{(f(a)-f(b))}{b-a}$.*

Ciò equivale a dire che la funzione almeno in un punto avrà pendenza uguale alla pendenza media valutata nell'intervallo.

Dimostrazione 5.9

Hp:	Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile in (a, b)
Th:	$\exists c \in (a, b): f'(c) = \dfrac{(f(a) - f(b))}{b - a}$
Consideriamo la funzione della retta $\boldsymbol{r}$ passante per $\boldsymbol{f(a)}$ e $\boldsymbol{f(b)}$:	$f(a) + \dfrac{(f(b) - f(a))}{b - a}(x - a)$
Costruiamo una nuova funzione:	$w(x) = f(x) - r = f(x) - \left[f(a) + \dfrac{(f(b) - f(a))}{b - a}(x - a)\right]$

Sappiamo che $\boldsymbol{w(x)}$ è:

- Continua (differenza funzioni continue)
- Derivabile (differenza funzioni derivabili)
- $w(a) = w(b) = 0$

Per il teorema di Weierstrass sappiamo che la funzione assume max e min nell'intervallo:

- Se $\boldsymbol{min} = \boldsymbol{max}$ allora la funzione è costante e diciamo che:

$$w(x) = 0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow w'(x) = 0$$

- Se $\boldsymbol{min} < \boldsymbol{Max}$ allora per il teorema di Fermat possiamo dire che:

$$\exists c \in (a,b): w'(c) = 0$$

Quindi:

$$w'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$w'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Il che significa che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

5.12.1. Teorema di rolle*

Conseguenza diretta del teorema di Lagrange è il **teorema di Rolle**:

Teorema 5.16 *Il **teorema di Rolle** afferma che, considerata una funzione continua su $[a,b]$ tale che $f(a) = f(b)$ e derivabile in (a,b) allora esiste un $c \in (a,b): f'(c) = 0$*

5.12.2. Teorema di Cauchy*

Il **teorema di Cauchy** è una generalizzazione del teorema di Lagranfe:

Teorema 5.17 *Il **teorema di Cauchy** afferma che, date due funzioni f, g continue su $[a,b]$ e derivabili in (a,b) esiste un $c \in (a,b)$:*

$$[g(b) - g(a)]f'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c)$$

Se consideriamo $g(x): g'(c) \neq 0$ possiamo scrivere:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Dimostrazione 5.10

Hp:	Siano $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ Siano $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabili in (a, b)
Th:	$\exists c \in (a, b): [g(b) - g(a)]f'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c)$
Costruiamo una nuova funzione:	$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$
Con:	$h(a) = 0$ e $h(b) = 0$
Allora per il teorema di Rolle possiamo dire che:	$\exists c \in (a, b): h'(x) = 0$
Quindi:	$h'(x) = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0$ $\Rightarrow [f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$

5.12.3. Test di monotonia*

Un’altra applicazione utile delle derivate riguarda le funzioni monotone:

Teorema 5.18 *Il **test di monotonia** afferma che, presa un funzione f derivabile in (a, b), essa è crescente/decrescente <u>se e solo se</u> $f'(x) \geq / \leq 0$.*

Vale inoltre per le funzioni strettamente monotone con derivata strettamente maggiore/minore di 0.

Dimostrazione 5.11

Hp:	Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile in (a, b)

Th:	$\exists c \in (a,b): [g(b) - g(a)]f'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c)$
Costruiamo una nuova funzione:	f è crescente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$
$\Rightarrow$	
Se la funzione è crescente:	$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$
Per il teorema di permanenza del segno:	$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$
Poiché la funzione è derivabile so che il limite esiste finito e possiamo ripetere per tutti i punti:	$f'(x) \geq 0$
$\Leftarrow$	
Consideriamo due punti:	$x_1, x_2 \in (a,b): x_2 > x_1$
Grazie al teorema di Lagrange possiamo trovare:	$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
Per ipotesi $\forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \boldsymbol{f'(x)} \geq \boldsymbol{0}$ il che significa:	$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$ $\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

Il teorema può essere analogamente dimostrato per funzioni decrescenti, strettamente crescenti e strettamente decrescenti.

Con la dimostrazione si vede anche che: se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è costante in (a, b). Poiché l'implicazione inversa (se f è costante in (a, b) allora ha derivata nulla), è ovvia, risulta dimostrata anche la seguente:

$$f' = 0 \; in \; (a, b) \Leftrightarrow f \text{ è } costante \; in \; (a, b)$$

5.12.4. Teorema di de l'Hospital

Le derivate risultano inoltre utili per calcolare il limite del rapporto di funzioni quando si presentano forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

Teorema 5.19 *Il **teorema di de l'Hospital** afferma che, date due funzioni f, g derivabili in un intervallo (a, b) con $g, g' \neq 0$ in (a, b). Se:*

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ *(oppure $\pm\infty$)*
- $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*$

Allora:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Il teorema continua a valere se $a = -\infty$ o se si considera il limite per $x \to b^-$ con $b \leq +\infty$

Dimostrazione intuitiva per $f, g \to 0$	
Prolunghiamo la continuità di $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ in $\boldsymbol{x_0}$ ponendo:	$f(x_0) = g(x_0) = 0$
Consideriamo la successione $\{\boldsymbol{x_n}\}$ tale che:	$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$
Possiamo quindi scrivere:	$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)}$
Applicando separatamente il teorema di Lagranfe possiamo scrivere:	$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(t_n)(x_n - x_0)}{g'(t_n^*)(x_n - x_0)}$

Notiamo però che la dimostrazione non è rigorosa in quanto i punti di validità di Lagrange possono essere diversi per le due successioni. Procediamo con la dimostrazione rigorosa:

Dimostrazione 5.12

Costruiamo una funzione:
$$h(x) = f(x_n)g(x) - g(x_n)f(x)$$
$$h(x_0) = h(x_n) = 0$$

Per il teorema di Rolle:
$$\exists t_n \in (x_0, x_n): h'(t_n) = 0$$

Sapendo che:
$$h'(x) = f(x_n)g'(x) - g(x_n)f'(x)$$

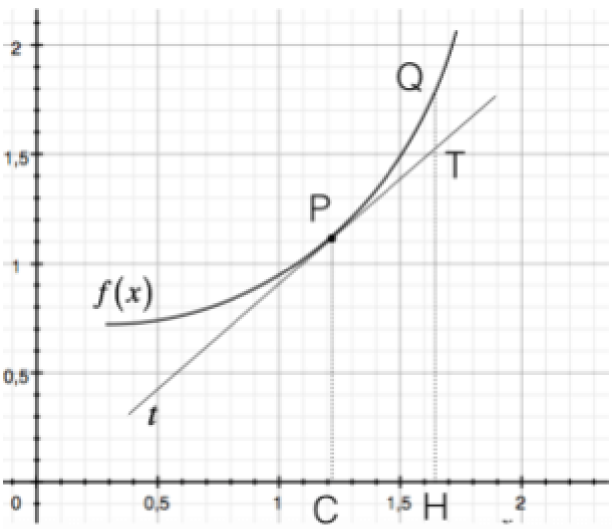
Quindi:
$$h'(t_n) = f(x_n)g'(t_n) - g(x_n)f'(t_n) = 0$$
$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)}$$

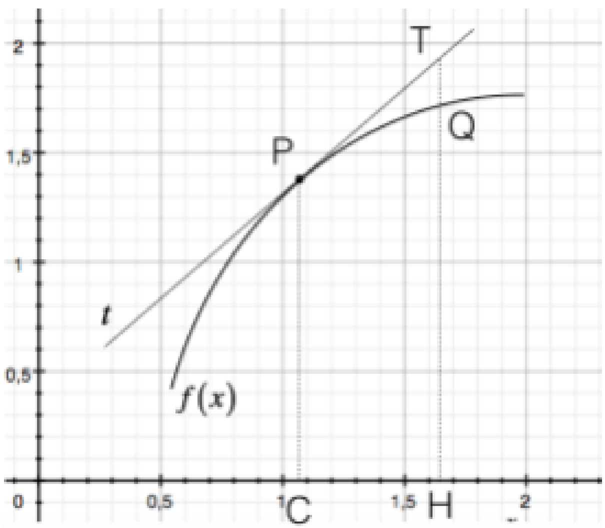
5.13. Convessità e concavità di una funzione

Definizione 5.4. *Un insieme si dice **concavo** se esiste un segmento che unisce due punti qualsiasi dell'insieme che non appartiene all'insieme.*

Definizione 5.5. *Un insieme si dice **convesso** se il segmento che unisce due punti qualsiasi dell'insieme appartiene sempre all'insieme.*

Chiamiamo **epigrafico** la parte di piano al di sopra di una funzione in un certo intervallo. Detto ciò possiamo estendere il concetto di concavità e convessità alle funzioni. Possiamo osservare che una funzione è convessa in un intervallo se la funzione si trova sempre sopra la sua tangente.





Perché ciò sia vero possiamo dire che se f è derivabile:

$$f \text{ è (strettamente) convessa} \Leftrightarrow f' \text{ è (strettamente) crescente}$$

$$f \text{ è (strettamente) concava} \Leftrightarrow f' \text{ è (strettamente) decrescente}$$

Se la funzione è derivabile due volte possiamo quindi scrivere:

$$f \text{ è (strettamente) convessa} \Leftrightarrow f^{II} \geq (>)\ 0$$

$$f \text{ è (strettamente) concava} \Leftrightarrow f^{II} \leq (<)\ 0$$

Quando la funzione cambia convessità/concavità si parla di **flesso** (un flesso è un punto dove la funzione taglia la retta tangente). Nei flessi la derivata seconda si annulla (non nei flessi a tangente verticale).

Se una funzione in un intervallo cambia complessivamente concavità possiamo aspettarci un numero dispari di flessi. Se una funzione in un intervallo complessivamente non cambia concavità possiamo aspettarci un numero pari di flessi.

5.14. Studio di una funzione

Complessivamente, quando vogliamo fare lo studio di una funzione i passi da seguire sono:

1. Studio del dominio
2. Ricerca di eventuali simmetrie (pari o dispari)
3. Studio del segno e delle radici della funzione
4. Studio dei limiti ai bordi del dominio
5. Studio della concavità agli asintoti
6. Ricerca di punti di non derivabilità
7. Studio dei flessi tramite la derivata seconda

5.15. Il differenziale

Consideriamo una funzione $f(x)$ derivabile in x_0. Vogliamo calcolare di quanto varia la funzione (Δf) da x_0 a $x_0 + d$. Vogliamo inoltre calcolare di quanto varia la retta tangente (df, chiamiamo questo **differenziale**). Ci interessa infine sapere quanto vale $\Delta f - df$, ossia l'errore che si crea tra retta derivata e funzione.

Quindi diciamo che:

$df = f'(x)dx$ (nelle rette $\Delta y = m\Delta x$)

Sappiamo che $f'(x) = \lim_{dx\to 0} \frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}$ se togliamo il limite otteniamo:

$$\frac{\overbrace{f(x_0+dx)-f(x_0)}^{\Delta f}}{dx} = f'(x_0) + \underbrace{\varepsilon(dx)}_{infinitesimo}$$

$\varepsilon(dx)$ è una quantità che tende a zero se $dx \to 0$, è cioè un infinitesimo per $dx \to 0$. Otteniamo quindi che:

$$\Delta f = [f'(x_0) + \varepsilon(dx)]dx$$

Se calcoliamo la differenza:

$$\Delta f - df = [f'(x_0) + \varepsilon(dx)]dx - f'(x)dx = f'(x_0)dx + \varepsilon(dx)dx - f'(x_0)dx = \underbrace{\varepsilon(dx)}_{\to 0}\underbrace{dx}_{\to 0}$$

La quantità $dx \cdot \varepsilon(dx)$ divisa per dx, tende a zero, ossia è un infinitesimo di ordine superiore a dx. Introduciamo un simbolo per indicare ciò:

Definizione 5.6. *Date due funzioni $f(x)$, $g(x)$ definite in un intorno di x_0, si dice che:*

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \text{ per } x \to x_0$$

Si legge "$f(x)$ è un o piccolo di $g(x)$" se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Riprendendo ciò che abbiamo scritto sopra possiamo dire:

$$f(x_0+dx) - f(x_0) = f'(x_0)dx + o(dx) \text{ per } dx \to 0$$

Quindi:

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + o(dx) \text{ per } dx \to 0$$

Si dice quindi che l'espressione appena scritta è un'*approssimazione* di Δf al primo ordine. In simboli:

$$\Delta f \approx df \text{ al primo ordine, vicino a } x_0$$

Possiamo quindi dire che:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{retta\ tangente} + \underbrace{o(x-x_0)}_{\substack{infinitiesimo\ di \\ ordine\ superiore\ al\ I}}$$

Chiamiamo questo **polinomio di Taylor di primo ordine**.

5.15.1. Algebra degli *o piccoli*

Elenchiamo le proprietà fondamentali degli *o piccoli*:

- $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$
- $ko(x^n) = o(x^n)$
- $o(kx^n) = o(x^n)$
- $-o(x^n) = o(x^n)$
- $o(x^n) + o(x^m) = o\left(x^{\min(n,m)}\right)$
- $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{m+n})$
- $o(x^n) \cdot x^m = o(x^{m+n})$

5.16. Formula di Taylor-MacLaurin con resto di Peano*

Ci chiediamo a questo punto se data una funzione derivabile tutte le volte che sarà necessario, esista un polinomio che, nell'intorno di un punto fissato, approssima la funzione meglio che la sua retta tangente. Introduciamo quindi il **polinomio di MacLaurin**:

Teorema 5.20 *Data una funzione f derivabile n volte in $x = 0$, esiste uno e un solo polinomio di grado $\leq n$, chiamiamolo T_n, con la proprietà che:*

$$T_n(0) = f(0), T_n'(0) = f'(0), \dots, T_n^{(n)} = f^{(n)}(0)$$

*e questo polinomio, detto **polinomio di MacLaurin** di f(x) di grado n, è:*

$$T_n(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \frac{1}{3!}x^3 f'''(0) + \dots + \frac{1}{n!}x^n f^{(n)}(0)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

(avendo posto $f^{(0)} = f$)

Possiamo quindi provare che il polinomio trovato approssima bene la funzione $f(x)$ in un intorno di $x = 0$:

Teorema 5.21 *Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $0 \in (a,b)$. Allora:*

$$f(x) = T_n(x) + o(x^n) \quad per\ x \to 0$$

*La formula si dice "**formula di MacLaurin di ordine n**, con **resto secondo Peano**".*

La formula ha quindi questa struttura:

funzione = polinomio approssimante + errore di approssimazione

Essendo l'errore di approssimazione $o(x^n)$, esso è tanto più piccolo maggiore è n. Dimostriamo quindi il teorema:

Dimostrazione 5.13

Dimostriamo prima per $\boldsymbol{n = 2}$:	$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f'(0)}{2}x^2 + o(x^2) \ \ per\ x \to 0$
Occorre quindi provare che	$f(x) - \left[f(0) + f'(0)x + \dfrac{f'(0)}{2}x^2\right] = o(x^2) \ \ per\ x \to 0$
Per definizione di "o piccolo" possiamo scrivere che:	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - \left[f(0) + f'(0)x + \dfrac{f'(0)}{2}x^2\right]}{x^2} = 0$
Il limite dà la forma di inderteminazione [0/0], che possiamo calcolare con De l'Hospital:	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x) - [f'(0) + f''(0)x]}{2x} = 0$
Vogliamo quindi dimostrare che il numeratore è un $\boldsymbol{o(x)}$. Notiamo che possiamo scrivere:	$f'(x) = f'(0) + f''(0)x + o(x)$ $o(x) = f'(x) - [f'(0) + f''(0)x]$

Parte induttiva

Avendo dimostrato per $\boldsymbol{n = 2}$, usiamo il metodo induttivo per dimostrare per $\boldsymbol{n}$ generico. Occorre dimostrare che:	$f(x) - \left[f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right] = o(x^n)$

Calcoliamo quindi il limite utilizzando De l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\left[f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right]}{x^n}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-\left[f'(0)+f''(0)x+\frac{f'''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}\right]}{nx^{n-1}}$$

Per l'ipotesi induttiva possiamo dire che:

$$f'(x)=T_{n-1,f'}(x)+o(x^{n-1})$$

$$f'(x)-\left[f'(0)+f''(0)x+\frac{f'''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}\right]=o(x^{n-1})$$

Possiamo concludere che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^{n-1})}{nx^{n-1}}=0$$

Tutto questo discorso si può generalizzare ad un punto $x_0 \neq 0$. Data una funzione derivabile n volte in x_0, si può costruire il suo polinomio di Taylor:

$$T_{n,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

e si può dimostrare che vale un analogo risultato di approssimazione locale.

Teorema 5.22 ***Formula di Taylor all'ordine n, con resto secondo Peano****: sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0\in(a,b)$. Allora:*

$$f(x)=T_{n,x_0}(x)+o((x-x_0)^n)\quad per\ x\to x_0$$

Vediamo un esempio di risoluzione di limite tramite gli sviluppi di Taylor-MacLaurin:

Esempio 5.7.

Consideriamo:

$$x-senx$$

Procediamo sviluppando:

$$\text{I}\to x-x+o(x)$$
$$\text{II}\to x-x+o(x^2)$$
$$\text{III}\to x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)+o(x^3)=\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Possiamo quindi dire che:

$$(x - senx) \sim \frac{x^3}{6}$$

Se avessimo continuato a sviluppare avremmo ottenuto:

$$\mathrm{V} \rightarrow x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{110} + o(x^5) \right) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{110}$$

Possiamo decidere di fermarci quando ci conviene, come vediamo nell'esempio successivo

Esempio 5.8.

Consideriamo il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(e^x - senx - 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \right)}{x^3}$$

Sviluppiamo le funzioni al numeratore al primo grado:

$$T\_[1 + x + o(x)] - [x + o(x)] - 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 = -\frac{x^2}{2} + x^3 + o(x)$$

Notiamo che l'$o(x)$ è un polinomio di grado > 1 di cui non conosciamo le incognite, quindi sviluppiamo al secondo grado:

$$\left[1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right] - [x + o(x^2)] - 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 = x^3 + o(x^2)$$

Abbiamo un polinomio al numeratore con grado > 2 con le incognite del termine di terzo grado sconosciute, sviluppiamo al terzo grado:

$$[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \left[x - \frac{x^2}{6} + o(x^3) \right] - 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 = \frac{4}{3} x^3 + o(x^3)$$

Otteniamo quindi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{4}{3} x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{4}{3}$$

5.16.1. Resto di Lagrange

Ci chiediamo a questo punto quanto sia l'errore commesso nell'approssimare una funzione mediante lo sviluppo di Taylor. Introduciamo quindi il **resto di Lagrange**:

Teorema 5.23 *Consideriamo una funzione $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte nell'intervallo $[a,b]$. Consideriamo un punto $x_0 \in [a,b]$. Possiamo dire che:*

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

dove c è un punto compreso nell'intervallo $[x_0, x]$

Vediamo un esempio:

Esempio 5.9.

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$

Sviluppiamo al terzo grado per $x_0 = 0$ e il resto di Lagrange per $x = \frac{1}{2}$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{f^{IV}(c)}{4!}x^4$$

Dove $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$e^{\frac{1}{2}} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!}}_{\frac{79}{48}} + \frac{f^{IV}(c)}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Poiché la funzione e^x è monotona crescente, possiamo dire che l'errore massimo sarà nel punto $c = \frac{1}{2}$. Quindi scriviamo:

$$\frac{f^{IV}(c)}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \leq \frac{e^{\frac{1}{2}}}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \leq \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cong 0{,}0045$$

Il valore ottenuto è la distanza massima tra la funzione $T_{3,0}(x)$ e e^x.

5.16.2. Comportamento delle funzioni

5.16.3. Teorema di monotonia

Avevamo già introdotto senza dimostrare il **teorema di monotonia**:

Teorema 5.24 *Il **teorema di monotonia** afferma che: sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona, per ogni $c \in (a,b)$ posso affermare che esistono $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to b^-} f(x) \in \mathbb{R}^*$ e che esistono finiti:*

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \qquad e \qquad \lim_{x\to c^+} f(x)$$

Possiamo quindi dimostrarlo (lo dimostriamo nel caso di funzioni monotone crescenti, si può dimostrare in modo analogo per funzioni monotone decrescenti):

Dimostrazione 5.14

Hp:	$Sia\ f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}\ monotona$
Th:	$\forall c \in (a,b)\ esistono\ finiti:$ $\lim_{x\to c^-} f(x) \quad e \quad \lim_{x\to c^+} f(x)$ Ed esistono: $\lim_{x\to a^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x\to b^-} f(x)$
Consideriamo quindi un punto generico **$c \in (a,b)$**. Sappiamo che:	$\exists\ \Lambda$ finito: $\Lambda = sup\{f(x): x \in (a,c)\}$ $(propriet\grave{a}\ dell'estremo\ superiore)$
Vogliamo dimostrare che:	$\lim_{x\to c^-} f(x) = \Lambda$
Quindi:	$\Lambda - \varepsilon < f(x) \underbrace{\leq \Lambda + \varepsilon}_{ovvia}$
Poiché per definizione **Λ** è il minore dei maggioranti e per monotonia, possiamo dire che:	$\exists x_0: \forall x \in (x_0, c), f(x) \geq 0$ $\Rightarrow f(x) > \Lambda - \varepsilon\ \ definitivamente$
In modo analogo di può dimostrare che:	$\lim_{x\to c^+} f(x) = \inf\{f(x): x \in (c,b)\}$
Dimostriamo ora che esiste $\boldsymbol{\lim_{x\to b^-} f(x)}$:	$\Lambda = \sup\{f(x): x \in (a,b)\}$

Se $\mathbf{\Lambda}$ è finito ripetiamo la dimostrazione precedente. In caso contrario possiamo dire che:	$\forall k > 0, \exists \bar{x} \in (a,b) \colon \forall x \in (\bar{x}, b), f(x) > k$ $\Rightarrow \lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$

5.17. Gli integrali

Spesso risulta molto utile calcolare l'area sottesa dalla curva di una funzione. Per calcolarla ricorriamo al concetto di integrali. Consideriamo una funzione:

$$f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

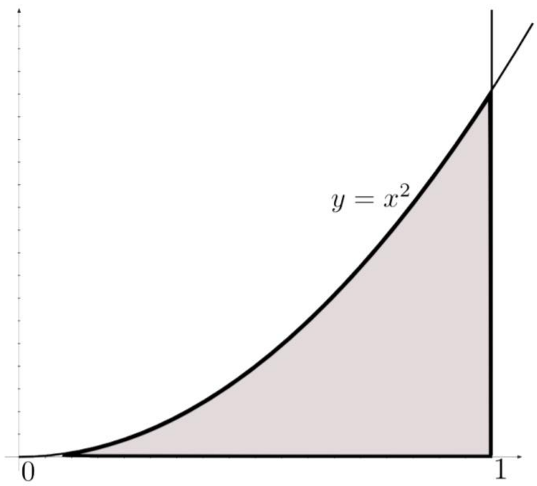
Suddividiamo la funzione in intervalli uguali con i seguenti estremi:

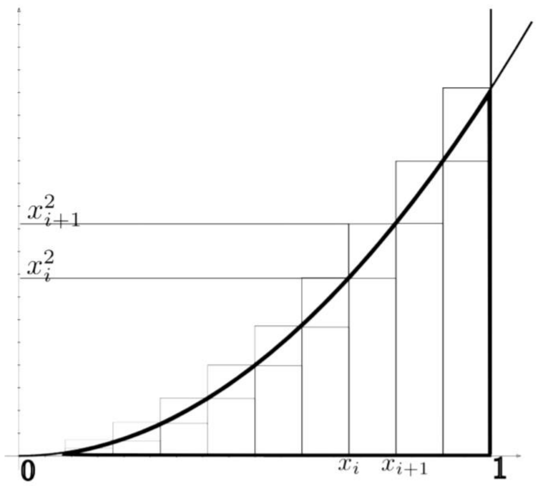
$$\begin{aligned} &x_0 = a \\ &x_1 \\ &\vdots \\ &x_{n-1} \\ &x_n = b \end{aligned}$$

Possiamo dire che l'ampiezza di ciascun intervallo è:

$$h = \frac{b-a}{n}$$
$$x_j = a + jh$$

Ora consideriamo un $c \in [x_{j-1}, x_j]$ e calcoliamo l'area del rettangolo che ha base h e altezza l'altezza della funzione nel punto c:





$$A_j = (x_{j-1}, x_j) f(c_j)$$

Chiamiamo la somma delle aree di tutti i rettangoli, costruiti in questo modo all'interno dell'intervallo $[a, b]$, **somma di Cauchy-Riemann**:

$$\sum_{j=1}^{n} (x_{j-1}, x_j) f(c_j) = S_n$$

Per approssimare con maggiore precisione l'area sottesa dalla curva facciamo tendere il numero degli intervalli a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (x_{j-1}, x_j) f(c_j) = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Se questo limite esiste, è finito e non dipende da come viene scelto il punto c_j, allora diciamo che $\boldsymbol{f(x)}$ **è integrabile nell'intervallo** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ e l'area sottesa dalla curva in quell'intervallo è:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

Notiamo quindi che l'integrale di una funzione è un numero e non una funzione.

5.17.1. Funzioni integrabili

Introduciamo ora alcune proprietà degli integrali:

- Si dice che la **variabile di integrazione è muta**, ossia:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

Se consideriamo alcune funzioni particolari, il calcolo dell'integrale risulta immediato in specifici intervalli:

$$\int_0^{2\pi} senx dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} cosx dx = 0$$

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

Ci chiediamo quindi quando una funzione **è sicuramente integrabile**:

- Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ è *continua*, allora è integrabile
- Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ è *monotona e limitata*, allora è integrabile
- Se $f_1: [a, b] \to \mathbb{R}$ e $f_2: [b, c] \to \mathbb{R}$ sono *integrabili*, allora la funzione:

$$(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, c) \\ f_2(x), & x \in [c, b] \end{cases}$$

è sicuramente integrabile. Ciò ci permette di dire che se una funzione ha un numero finito di discontinuità a salto allora è sicuramente integrabile.

Se infatti una funzione ha un numero infinito di discontinuità a salto non è sempre integrabile. Prendiamo come esempio la **funzione di Dirichlet**:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

La funzione non è integrabile poiché il limite per $n \to \infty$ di S_n può valere 1 o 0 a seconda della scelta di c_j.

5.17.2. Il teorema fondamentale del calcolo integrale*

Introduciamo il concetto di **primitiva di una funzione**. Se consideriamo una funzione $G(x)$ derivabile in I, essa è primitiva di $f(x)$ in I se:

$$\forall x \in I, G'(x) = f(x)$$

Notiamo che $G(x)$ non è unica. Se infatti sommiamo o sottraiamo una costante, la derivata di $G(x)$ non cambia. Diciamo quindi che la primitiva di una funzione $f(x)$ è:

$$G(x) + c$$

Sono note ad esempio le primitive di:

$$x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$cosx \to sinx$$
$$sinx \to -cosx$$

Enunciamo e dimostriamo il **teorema fondamentale del calcolo integrale**:

Teorema 5.25 *Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione* ***continua*** *e sia $G(x)$ la primitiva di $f(x)$ in $[a, b]$. Allora vale che:*

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

Dimostriamo il teorema:

Dimostrazione 5.15	
Hp:	$Sia\ f: [a, b] \to \mathbb{R}\ continua$ $Sia\ G(x)\ la\ primitiva\ di\ f(x)\ in\ [a, b]$
Th:	$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$
Dividiamo l'intervallo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ in $\boldsymbol{n}$ sottointervalli uguali:	$a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$
Possiamo scrivere che:	$G(b) - G(a) =$ $[G(x_n) - G(x_{n-1})] + [G(x_{n-1}) - G(x_{n-2})] + \cdots + [G(x_1) - G(x_0)] =$ $\sum_{j=1}^{n} [G(x_j) - G(x_{j-1})]$k
Applicando il teorema di Lagrange ai singoli intervalli:	$\exists c_j \in (x_{j-1}, x_j): G'(c_j) = \dfrac{G(x_j) - G(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}$ $G(x_j) - G(x_{j-1}) = G'(c_j)(x_j - x_{j-1}) = f(c_j)(x_j - x_{j-1})$
Possiamo quindi scrivere:	$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f(c_j)(x_j - x_{k-1})}_{S_n} =$
Essendo per ipostesi continua, $\boldsymbol{f(x)}$ è integrabile, quindi:	$= \int_a^b f(x)dx$

Il teorema si basa sul fatto che la funzione sia continua, quindi integrabile. Ciò implica che il valore del limite sommatoria non dipende dai punti c_j scelti. Nella dimostrazione i punti vengono scelti attraverso al teorema di Lagrange senza quindi variare il risultato del limite.

5.17.3. Proprietà degli integrali

Vediamo quindi alcune delle principali proprietà nel calcolo degli integrali:

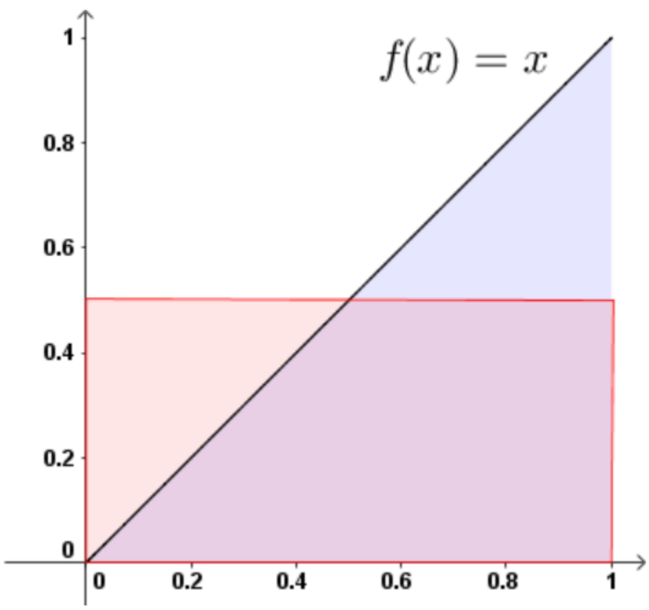
- **Linearità**: se $f(x)$ e $g(x)$ integrabili in $[a,b]$
$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$
- **Additività rispetto al dominio di integrazione**:
$$\int_a^b f(x)dx + \alpha\int_b^c f(x)dx = \alpha\int_a^c f(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
- **Positività**:
$$f(x)\geq 0 \; in \; [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$
- **Monotonia**: se $f(x)\geq g(x) \; in \; [a,b]$:
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$
- **Modulo**:
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

5.17.4. Teorema della media integrale

Introduciamo e dimostriamo il **teorema della media integrale:**

Teorema 5.26 *Data una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, esiste un $c\in[a,b]$ tale che:*
$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Notiamo che la media integrale, ossia:
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$



E' l'altezza del rettangolo con base (a,b) la cui area è equivalente all'area sottesa dalla curva. Il teorema garantisce quindi l'esistenza di un punto c in cui la funzione assume l'altezza del rettangolo. Il teorema è valido soltanto per le funzioni continue. Se la funzione presentasse ad esempio una discontinuità a salto potrebbe succedere che la funzione non assuma il valore della media integrale. Possiamo quindi dimostrare il teorema:

Dimostrazione 5.16

Hp:	$Sia\ f: [a, b] \to \mathbb{R}\ continua$
Th:	$\exists c \in [a, b]: f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$
Il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di un massimo e un minimo:	$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b m dx$ $M = \frac{1}{b-a}\int_a^b M dx$
Possiamo scrivere che:	$m \leq f(x) \leq M$ $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$
Moltiplicando il tutto per $\frac{1}{b-a}$ otteniamo:	$\frac{1}{b-a}\int_a^b m dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b M dx$ $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$
Per il teorema dei valori intermedi possiamo dire che esiste $\boldsymbol{\Lambda}$ tale che:	$\Lambda = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$
Il che vuol dire che esiste un $\boldsymbol{c}$ tale che:	$f(c) = \Lambda = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

In fisica capita di dover calcolare alcuni valori utili (ad esempio nel calcolo della potenza media) utilizzando il concetto di media integrale:

$$f_M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Può però succedere, ad esempio nel caso di funzioni come *sen* o *cos* che l'area in un intervallo risulti uguale a 0. Risulta quindi utile utilizzare il concetto di **valore efficace di una funzione**, definito come la radice della media quadratica (ossia la radice della media dei quadrati):

$$f_E = \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

5.17.5. Metodi di integrazione

Introduciamo ora alcuni metodi di integrazione:

Integrazione per sostituzione

Consideriamo una funzione $G(t)$ primitiva di $f(t)$ in un intervallo I:

$$\forall t \in I, \qquad G'(t) = f(t)$$

Sia ora $t = \varphi(x)$ una funzione derivabile e continua sull'intervallo $[a, b]$ tale che $\varphi: [a, b] \to I$. Possiamo quindi dire che:

$$\frac{d}{dx} G\big(\varphi(x)\big) = G'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) = f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Ne segue quindi che per $\varphi(x) = t$:

$$\int f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt$$

Da cui si ricava che:

$$\int_a^b f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$$

Vediamo un esempio:

Esempio 5.10.

Consideriamo il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{(e^x + e^{-x})} dx$$

Poniamo $t = e^x$ e svolgiamo i calcoli:

$$\frac{dt}{dx} = e^x \to dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

$$\int_{e^0}^{e^1} \frac{1}{t+\frac{1}{t}} \frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{1}{1+t^2} dt = [arctgt]_1^e = \frac{\pi}{4}$$

Integrazione per parti

Consideriamo due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ derivabili in $[a, b]$. Se consideriamo la derivata del prodotto otteniamo:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Possiamo quindi dire che:

$$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Il che equivale a dire che:

$$\int_a^b f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Vediamo due esempi:

Esempio 5.11.

Consideriamo il seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} xsenxdx$$

Poniamo:

$$f(x) = x$$
$$g'(x) = senx$$

Risolviamo:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} xsenxdx = -[xcosx]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} cosxdx = [-xcosx]_0^{\frac{\pi}{3}} + [senx]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

Esempio 5.12.

Consideriamo il seguente integrale:

$$\int_a^b lnx$$

Poniamo:

$$f(x) = lnx$$
$$g'(x) = 1$$

Risolviamo:

$$\int_a^b lnx = [xlnx]_a^b - \int_a^b \frac{1}{x} x\, dx = [xlnx]_a^b - [x]_a^b$$

5.17.6. Integrali di frazioni di polinomi

Vediamo ora come risolvere una serie di casi di integrali del tipo:

$$\int_a^b \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$$

Se $m \leq n$ si esegue la divisione tra polinomi e si ottiene un integrale del tipo:

$$\int_a^b quoziente + \int_a^b \frac{resto}{denominatore}$$

L'integrale del quoziente si calcola immediatamente. Sappiamo inoltre che:

$$grado(resto) < grado(denominatore)$$

Vediamo ora come risolvere questo caso:

Denominatore di primo grado

Se il ci si trova nel caso:

$$\int_a^b \frac{k}{ax+b}$$

Si calcola l'integrale facilmente tramite algoritmo:

$$\int \frac{k}{ax+b} = \frac{k}{a} \int \frac{a}{ax+b} = \frac{k}{a} \ln|ax+b| + c$$

Denominatore di secondo grado

Bisogna distinguere in tre casi, a seconda del determinante del denominatore:

A. Se il denominatore ha due radici distinte si scompone la frazione in fratti semplici e si integra mediante la somma di logaritmi, vediamo un esempio:

$$\int \frac{x+2}{(x-2)(x+3)} dx$$

$$\frac{x+2}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3} = \frac{x(a+b) + (3a-2b)}{(x-2)(x+3)}$$

Poniamo $a + b = 1$ e $3a - 2b = 2$ e otteniamo:

$$\int \frac{x+2}{(x-2)(x+3)}dx = \int \frac{\frac{4}{5}}{x-2}dx + \int \frac{\frac{1}{5}}{x+3} = \frac{4}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{5}\ln|x+3| + c$$

B. Se il denominatore è un quadrato perfetto ci possiamo ricondurre mediante sostituzione alla somma di potenze, vediamo un esempio:

$$\int \frac{x+1}{(3x+2)^2}dx$$

Poniamo:

$$3x+2=t$$
$$dx = \frac{dt}{3}$$
$$x = \frac{t-2}{3}$$

Quindi:

$$\int \frac{\frac{t-2}{3}+1}{t^2}\frac{dt}{3} = \frac{1}{9}\int \frac{t+1}{t^2}dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{9}\left(\ln|t| - \frac{1}{t}\right) + c =$$
$$\frac{1}{9}\ln|3x+2| - \frac{1}{9}(3x+2)^{-1} + c$$

C. Se il denominatore non si annulla si procede a seconda dei casi. Se l'integrale è del tipo:

$$\int \frac{k}{a^2x^2+b^2}dx = \frac{k}{a^2b^2}\int \frac{a^2}{\left(\frac{ax}{b}\right)^2+1}dx = \frac{k}{a^2b^2}artg\left(\frac{ax}{b}\right) + c$$

Generalizzando con un polinomio di primo grado al numeratore otteniamo:

$$\int \frac{x+d}{(x+b)^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2b}{x^2+2bx+b^2+a^2}dx - \int \frac{d-b}{(x+b)^2+a^2}dx =$$
$$\frac{1}{2}\ln|x^2+2bx+b^2+a^2| - \frac{d-b}{a}arctg\left(\frac{x+b}{a}\right) + c$$

Denominatore di grado maggiore di due

Se il denominatore è un polinomio di grado maggiore di due è sempre possibile scomporlo in un prodotto di fattori di primo grado, oppure di secondo grado irriducibili. Ci si può quindi ricondurre ai casi precedentemente elencati.

5.17.7. Integrali generalizzati

Fino ad ora abbiamo parlato di integrali in domini limitati del tipo:

$$\int_a^b f(x)dx$$

E' possibile però estendere la definizione a domini illimitati. Consideriamo una funzione fatta in questo modo:

$$f: [a, b) \to \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$$

Possiamo quindi calcolare l'integrale per un estremo superiore minore di b, ad esempio $b - \varepsilon$. Facendo tendere il valore di ε a zero otteniamo:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Distinguiamo quindi i tre casi possibili:

- **Se il limite esiste finito** allora $f(x)$ è integrabile in senso generalizzato e l'integrale converge (l'infinitesimo della base prevale)
- **Se il limite esiste ma è infinito** allora l'integrale diverge (prevale l'infinito dell'altezza)
- **Se il limite non esiste** allora la funzione non è integrabile per l'intervallo $[a, b)$

Stesso discorso possiamo fare per il limite sinistro:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Se quindi abbiamo una funzione $f: [a, c)(c, b] \to \mathbb{R}$ possiamo spezzare l'intervallo e otteniamo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Vediamo alcuni esempi:

Esempio 5.13.

Se ci troviamo nel caso:

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}$$
$$con\ \alpha > 0$$

Proviamo a calcolare l'integrale:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^a \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Distinguiamo i casi:

- Se $\alpha = 1$ otteniamo:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\ln|x|]_{\varepsilon}^{a} = \underbrace{lna}_{finito} - \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} ln\varepsilon}_{-\infty} = +\infty$$

- Se $\alpha \neq 1$ otteniamo:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\mathrm{x}^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{\varepsilon}^{a} = \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Se $0 < \alpha < 1$ converge

Se $\alpha > 1$ diverge

Esempio 5.14.

Consideriamo l'integrale:

$$\int_{0}^{a}\frac{1}{(senx)^{\alpha}}$$

Se si trova questo caso semplicemente:

Se $0 < \alpha < 1$ converge

Se $\alpha \geq 1$ converge

Possiamo inoltre calcolare gli integrali con estremi infiniti. Semplicemente:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{w\to+\infty}\int_{a}^{w} f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{w\to-\infty}\int_{w}^{a} f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

5.17.8. Integrale indefinito

Possiamo definire inoltre concetto di **integrale indefinito** come l'insieme di tutte le primitive di una funzione. Considerata una funzione e la sua primitiva, definiamo l'integrale indefinito di quella funzione:

$$\int f(x)dx = G(x) + c$$

La costante c può assumere qualsiasi valore reale. Graficamente possiamo immaginarci l'integrale indefinito come infinite curve parallele l'una all'altra.

5.17.9. La funzione integrale

Consideriamo ora una funzione $f(x)$ integrabile in I (in senso proprio o generalizzato). Consideriamo ora un intervallo:

$$[x_0, x] \subseteq I$$

Calcoliamo ora l'integrale nell'intervallo $[x_o, x]$:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Chiamiamo $F(x)$ **funzione integrale di $\boldsymbol{f(x)}$**.

5.17.10. Il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale*

Possiamo ora enunciare e dimostrare il **secondo teorema fondamentale del calcolo integrale**:

Teorema 5.27 *Il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale afferma che, data una funzione $f: [a, b] - \mathbb{R}$ integrabile in senso proprio o generalizzato nell'intervalo $[a, b]$, e data la funzione integrale associata:*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \;\; con\; x_0 \in [a, b]$$

$F(x)$ è continua su $[a, b]$ e che se $f(x)$ è continua, $F(x)$ è derivabile in $[a, b]$ e in particolare:

$$\forall x \in [a, b], \qquad F'(x) = f(x)$$

Dimostriamo il teorema:

Dimostrazione 5.17

Hp:	*Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile* *Sia $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \;\; con\; x_0 \in [a, b]$*
Th:	*1. $F(x)$ è continua su $[a, b]$* *2. Se $f(x)$ è continua, allora $F(x)$ è derivabile e: $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$*

Dimostrazione **1° tesi** per funzioni **limitate**

Se $\boldsymbol{f(x)}$ è limitata possiamo scrivere che:

$$\exists k > 0: |f(t)| \leq k \ \forall t \in [a, b]$$

Per provare la continuità di $\boldsymbol{f}$ in un generico punto $\bar{\boldsymbol{x}} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ consideriamo:

$$|F(\bar{x} + h) - F(\bar{x})| = \left| \int_{x_0}^{\bar{x}+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)dt \right| = \left| \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)dt \right|$$

Per le proprietà degli integrali possiamo dire che:

$$\left| \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)dt \right| \leq \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} |f(t)|dt \leq \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} kdt = kh$$

Se calcoliamo il limite per $\boldsymbol{h \to 0}$ otteniamo:

$$\lim_{h \to 0} hk = 0$$

Possiamo quindi dire che per $\boldsymbol{h \to 0}$:

$$|F(\bar{x} + h) - F(\bar{x})| \leq 0$$
$$\Rightarrow |F(\bar{x} + h) - F(\bar{x})| = 0$$
$$\Rightarrow F(x) \text{ è } continua\ in\ \bar{x}$$

Dimostrazione **1° tesi** per funzioni **illimitate**

Consideriamo un punto $\bar{\boldsymbol{x}}$ nell'intorno del quale $\boldsymbol{f}$ è illimitata. Scriviamo che:

$$F(\bar{x} + h) - F(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)dt$$

Possiam dire che:

$$\int_{\bar{x}}^{b} f(t)dt = \int_{x_0}^{\bar{x}+h} f(t)dt - \int_{\bar{x}+h}^{b} f(t)dt$$

Facendo tendere $\boldsymbol{h \to 0^+}$ otteniamo che, per definizione di integrale generalizzato:

$$\int_{\bar{x}+h}^{b} f(t)dt \to \int_{\bar{x}}^{b} f(t)dt$$

Quindi per differenza (analogamente si dimostra per $\boldsymbol{h \to 0^-}$):

$$\int_{x_0}^{\bar{x}+h} f(t)dt \to 0$$
$$\Rightarrow F(\bar{x} + h) - F(\bar{x}) \to 0$$
$$\Rightarrow F(x) \text{ è } continua\ in\ \bar{x}$$

Dimostrazione **2° tesi**

Per il teorema della media integrale (continuità) possiamo scrivere che:	$F(\bar{x}+h)-F(\bar{x})=\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)dt = hf(x_h)$ $con\ x_h \in [\bar{x}, \bar{x}+h]$
Quindi possiamo dire che:	$\frac{[F(\bar{x}+h)-F(\bar{x})]}{h} = f(x_h)$
Oserviamo che:	$\lim_{h \to 0} \frac{[F(\bar{x}+h)-F(\bar{x})]}{h} = F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$

Una conseguenza diretta del teorema è che *la funzione integrale ha sempre un grado di regolarità in più rispetto alla funzione integranda*, quindi:

$$f(x) \in C^n([a,b])$$
$$F(x) \in C^{n+1}([a,b])$$

6. Equazioni differenziali

In matematica, un'**equazione differenziale** è un'equazione che lega una funzione incognita alle sue derivate. Un'equazione differenziale contiene la variabile indipendente, la funzione e le sue derivate:

$$F\left(t, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Se la funzione contiene una sola variabile indipendente si parla di **equazione differenziale ordinaria**, in caso contrario si parla di **equazione differenziale alle derivate parziali**.

Con **ordine** di un'equazione differenziali si intende l'ordine di derivazione della funzione all'interno dell'equazione. La soluzione di un'equazione differenziale è la funzione che rende vera l'equazione in un determinato intervallo. Noi studieremo le **equazioni di primo ordine**, che si presentano in questa forma:

$$F(t, y, y') = 0$$

Chiamiamo **forma esplicita** di un'equazione differenziale la seguente scrittura:

$$y' = f(t, y)$$

Vediamo un esempio:

Esempio 6.1.

Consideriamo l'equazione:

$$y'(t) = f(t)$$

Risolvendo otteniamo:

$$y(t) = \int f(t)dt + c$$

L'equazione ha quindi infinite soluzioni dipendenti da un parametro. La soluzione si chiama quindi **soluzione generale** o **integrale generale.**

Alle volte può capitare di avere come condizione il passaggio da un punto. Chiamiamo questo tipo di problema **problema di Cauchy**. Vediamo un caso generale:

Esempio 6.2.

Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Ci viene quindi posta la condizione di passaggio in un certo punto t_0. In questo modo possiamo trovare la cosiddetta **soluzione particolare** o **integrale particolare**.

6.1. Risolvere le equazioni differenziali

Esistono tre modi di risolvere le equazioni differenziali:

1. **Studi qualitativi**, che si basano sullo studio dell'andamento della funzione e della sua derivata
2. **Metodi numerici**, ad esempio la **discretizzazione**, che si basa sul far assumere alla variabile valori discreti e sull'utilizzo della derivata al fine di approssimare la funzione (approccio di Eulero)
3. **Metodo analitico**, applicabile in un numero limitato di casi che ora vedremo.

6.1.1. Equazioni a variabili separabili

Chiamiamo **equazioni a variabili separabili** le equazioni differenziali del tipo:

$$y' = a(t)b(y)$$

Per risolvere questo tipo di equazioni seguiamo questi passaggi:

1. Si cercano le soluzioni costanti ponendo:

$$b(y) = 0$$

2. Si usa il metodo di separazione delle variabili seguendo questi passaggi:

$$\frac{dy}{dt} = a(t)b(y)$$
$$\frac{dy}{b(y)} = a(t)dt$$
$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t)dt + c$$
$$B(y) = A(t) + c$$

3. Nel caso in cui la funzione $B(y)$ sia invertibile possiamo scrivere:

$$y = B^{-1}(A(t) + c)$$

Vediamo alcuni esempi:

Esempio 6.3.

Consideriamo la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{1}{y} \cdot 1$$

Abbiamo quindi:

$$a(t) = 1$$
$$b(y) = \frac{1}{y}$$

Cerchiamo le soluzioni costanti:

$$\frac{1}{y} = 0$$

Quest'equazione non ha soluzioni costanti, proseguiamo:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y}$$
$$ydy = dt$$
$$\int ydy = \int dt + c$$
$$\frac{y^2}{2} = t + c$$
$$y^2 = 2(t + c)$$

Se ad esempio ci venisse imposta una condizione come $y(0) = 2$, potremmo scrivere:

$$y = \pm\sqrt{2(t + c)}$$
$$2 = \pm\sqrt{2c}$$
$$y = \sqrt{2(t + 2)}$$

Avremmo potuto risolvere anche in questo modo:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{b(s)} = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$$
$$\int_{2}^{y} sds = \int_{0}^{t} d\tau$$

Esempio 6.4.

Consideriamo la seguente equazione:

$$y' = 1 + y^2$$

Cerchiamo le soluzioni costanti:

$$1 + y^2 = 0$$

Non ha soluzioni costanti, procediamo:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2$$
$$\frac{dy}{1 + y^2} = dt$$
$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dt + c$$
$$arctg(y) = t + c$$

Esempio 6.5.

Consideriamo la seguente equazione:

$$y = 2t\sqrt{1 - y^2}$$

Cerchiamo le soluzioni costanti:

$$\sqrt{1 - y^2} = 0$$
$$1 - y^2 = 0$$
$$y = \pm 1$$

Cerchiamo ora le altre soluzioni:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int 2tdt + c$$
$$arcsen(y) = t^2 + c$$

6.1.2. Equazioni lineari

Chiamiamo **equazioni lineari** le equazioni differenziali del tipo:

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

Se $f(t) = 0$, allora l'equazione viene detta **omogenea** in caso contrario viene detta **completa**.

Questo tipo di equazioni vengono risolte per $a(t)$ e $f(t)$ continue in $I \subseteq \mathbb{R}$, utilizzando il **principio di sovrapposizione**. La soluzione infatti sarà:

$$y(t) = y_0(t) + \tilde{y}(t)$$

Dove:

- $y(t)$ è **l'integrale generale**
- $y_0(t)$ è la **soluzione generale omogenea**

- $\tilde{y}(t)$ è la **soluzione completa**

Per risolvere l'equazione procediamo quindi in questo modo:

1. Troviamo la soluzione generale omogenea:
$$y_o'(t) + a(t)y_o(t) = 0$$
$$y_o'(t) = -a(t)y_o(t)$$
$$\frac{dy_0}{dt} = -a(t)y_o$$
$$\int \frac{dy_o}{y_o} = \int -a(t)dt + \mathrm{c}$$
$$\ln|y_o| = -\int a(t)dt + \mathrm{c}$$
$$|y_o| = e^{-\int a(t)dt + c}$$
$$|y_0| = e^c \cdot e^{-\int a(t)dt}$$
Chiamiamo $h = e^c$:
$$y_o = \pm h e^{-\int a(t)dt}$$
Chiamiamo $k = \pm h$:
$$y_o = k e^{-\int a(t)dt}$$
2. Troviamo una qualsiasi soluzione dell'equazione completa (utilizzando il **metodo di variazione della costante**). Vogliamo trovare soluzioni del tipo:
$$\tilde{y}(t) = c(t)e^{-\int a(t)dt}$$
Sostituiamo quindi nell'equazione di partenza:
$$\left(c'^{(t)} e^{-\int a(t)dt} - a(t)c(t)e^{-\int a(t)dt}\right) + a(t)c(t)e^{-\int a(t)dt} = f(t)$$
$$c'(t) = f(t)e^{\int a(t)dt}$$
$$c(t) = \int f(t)e^{\int a(t)dt} + 0$$
Quindi otteniamo che:
$$y(t) = e^{-\int a(t)dt}\left(k + \int f(t)e^{-\int a(t)dt} dt\right)$$
Che possiamo riscrivere come:
$$y(t) = e^{-A(t)}\left(k + \int f(t)e^{-A(t)} dt\right)$$

Vediamo un esempio:

Esempio 6.6.

Consideriamo l'equazione:
$$y' + \frac{2y}{t} = \frac{1}{t^2}$$
Abbiamo quindi che:

$$a(t) = \frac{2}{t}$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2}$$

Poiché le soluzioni devono essere continue, dobbiamo fare attenzione al dominio. Risolviamo:

$$y(t) = e^{-\int \frac{2}{t} dt} \left(k + \int \frac{1}{t^2} e^{-\int a(t) dt} dt \right) =$$

$$e^{-2\ln|t|} \left(k + \int \frac{1}{t^2} e^{2\ln|t|} dt \right) = \frac{k}{t^2} + \frac{1}{t}$$

La funzione $y(t)$ è continua in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$

7. Serie numeriche

Abbiamo precedentemente introdotto il concetto di successioni numeriche. Data una successione di numeri reali $\{a_n\}$, chiamiamo **serie dei termini a_n** la scrittura:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Per dare un significato a questa scrittura, costruiamo una nuova successione $\{s_n\}$ fatta in questo modo:

$$\begin{aligned}
&S_0 = a_0\\
&S_1 = a_0 + a_1\\
&S_2 = a_0 + a_1 + a_2\\
&\vdots\\
&S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n
\end{aligned}$$

Il numero s_n viene chiamato **somma parziale n-esima della serie**. Possiamo scrivere la somma parziale n-esima come:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Teorema 7.1 *Diciamo che una serie è convergente, divergente o irregolare se $\{s_n\}$ p rispettivamente convergente, divergente o irregolare. In particolare, se $\{s_n\}$ è convergente, $s_n \to s$, diremo che s è la somma delle serie possiamo scrivere che:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = s$$

Possiamo notare che perché una serie sia convergente, è necessario (non sufficiente) che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Vediamo alcune serie importanti:

La serie geometrica

La **serie geometrica è definita come**:

$$\sum q^n$$

Per capire il comportamento della serie geometrica osserviamo che:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Possiamo dimostrare questa equivalenza per induzione:

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1-q^{n+1}$$
$$\sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k = 1-q^{n+1}$$
$$\sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = 1-q^{n+1}$$
$$\sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1-q^{n+1}$$
$$\sum_{k=1}^{n} q^k + 1 - \left(\sum_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1}\right) = 1-q^{n+1}$$
$$1-q^{n+1} = 1-q^{n+1}$$

Otteniamo quindi che:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Il che significa che per:

- $-1 < q < 1$ la serie converge a $\frac{1}{1-q}$
- $q < -1 \lor q \geq 1$ la serie diverge
- $q = -1$ la serie è irregolare

La serie armonica

Viene chiamata **serie armonica** la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = +\infty$$

Si può infatti dimostrare che:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$$

E poiché $\ln(n+1)$ è divergente la serie è divergente.

Serie di Mengoli

Viene chiamata **serie di Mengoli** la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Notiamo che il secondo termine si elide con il terzo, il quarto con il quinto e così via. In generale chiamiamo **serie telescopica** una serie fatta in questo modo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_0 - \lim_{n\to\infty} b_n$$

7.1.1. Resto di una serie

Abbiamo precedentemente definito la somma parziale di una serie S_n. Introduciamo quindi il **resto di una serie**. Chiamiamo resto della serie:

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

Ossia la somma dei termini a_n da un n determinato a infinito. Esiste un teorema legato al resto della serie:

Teorema 7.2 *Data una serie convergente:*

$$\sum a_k$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta che il resto della serie:

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

converge, inoltre $R_n \to 0$ per $n \to \infty$

Possiamo quindi dimostrare il teroema:

Dimostrazione 7.1

Hp:	$Sia \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ convergente
Th:	$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n}^{\infty} a_k \ converge$ $R_n \to 0$ per $n \to \infty$
Consideriamo una somma parziale generica:	$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$
La ***h***-esima somma parziale di $\boldsymbol{R_n}$ sarà:	$S_h^{R_n} = \sum_{k=n}^{h} a_k \ \ (per\ h \geq n)$
Possiamo quindi dire che, per $\boldsymbol{h} > \boldsymbol{n}$, vale:	$S_h^{R_n} + S_{n-1} = S_h$
Passando al limite per $\boldsymbol{h} \to \infty$ otteniamo:	$R_n + s_{n-1} = s$
Per $\boldsymbol{n} \to \infty$, $\boldsymbol{s_{n-1}} \to \boldsymbol{s}$, quindi:	$R_n = s - s_{n-1} \to 0$

7.2. Serie a termini non negativi

Diciamo che una **serie a termini non negativi** è una serie:

$$\sum a_n \ con\ a_n \geq 0$$

Possiamo notare che vale:

$$S_{n+1} \geq S_n$$

E inoltre:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

Notiamo infine che per il teorema di monotonia, la successione S_n è divergente o convergente, non può quindi essere irregolare.

Esistono alcuni teoremi che aiutano a determinare il comportamento di una serie. Abbiamo già detto che perché una serie sia convergente, il termine generale a_n tenda a zero.

Introduciamo quindi altri teoremi che permettono di capire come si comporta una serie:

7.2.1. Criterio del confronto*

Di fondamentale importanza è il **criterio del confronto:**

Teorema 7.3	*Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie non negative tale che valga definitivamente $a_n \leq b_n$. Allora vale che:*
	Se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge *Se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge*

Dimostriamo il teorema.

Dimostrazione 7.2	
Hp:	*Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie* Valga definitivamente $a_n \leq b_n$
Th:	**Se $\sum b_n$ *converge* $\Rightarrow \sum a_n$ *converge*** **Se $\sum a_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum b_n$ *diverge***
Chiamiamo:	a_n minorante di b_n b_n maggiorante di a_n
Siano:	$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $S_n^* = \sum_{k=1}^{n} b_k$
Per ogni $\boldsymbol{k}$, sommando membro a membro le disuguaglianze otteniamo:	$0 \leq a_k \leq b_k$ $0 \leq S_n \leq S_n^*$

Sappiamo che una serie a termini positivi è regolare, calcolando il limite:	$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} S_n^*$
Applicando il teorema del confronto dimostriamo la tesi:	$0 \leq \sum a_n \leq \sum b_n$

Esempio 7.1.

Consideriamo la serie (per $n > 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Possiamo dire che per $\alpha = 1$ la serie diverge (serie armonica).

Per $\alpha < 1$ la serie è maggiorante della serie armonica, pertanto diverge

7.2.2. Criterio del confronto asintotico

Dal teorema precedentemente dimostrato ricaviamo il **criterio del confronto asintotico**:

Teorema 7.4 *Se due successioni a termini positivi $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono asintotiche:*

$$a_n \sim b_n$$

Allora le corrispondenti serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.

Dimostriamo il teorema:

Dimostrazione 7.3

Hp:	*Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due serie* Valga $a_n \sim b_n$
Th:	$\sum \mathrm{a_n}$ e $\sum \mathrm{b_n}$ hanno lo stesso carattere
Dire che $\boldsymbol{a_n \sim b_n}$ per $\boldsymbol{n} \to \infty$ significa che:	$\frac{a_n}{b_n} \to 1 \; per \; n \to \infty$

Per ogni $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ vale definitivamente:	$1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon$
Scegliamo ad esempio $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, otteniamo:	$\frac{1}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} b_n$
Dalla prima eguaglianza ricaviamo che se $\sum \boldsymbol{a_n}$ converge anche $\sum \boldsymbol{b_n}$ converge (criterio del confronto)	$\frac{1}{2} b_n < a_n$
Dalla seconda eguaglianza ricaviamo che se $\sum \boldsymbol{a_n}$ diverge anche $\sum \boldsymbol{b_n}$ diverge (criterio del confronto)	$a_n < \frac{3}{2} b_n$

Grazie a questo teorema possiamo ricavare il carattere di alcune serie riconducendole a serie il cui carattere è noto. Vediamo alcuni esempi di applicazione:

Esempio 7.2.

Consideriamo la serie (per $n > 0$)

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

Notiamo che:

$$\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$$

Essendo la serie di Mengoli convergente $\left(\sum \frac{1}{n(n+1)}\right)$, possiamo dire che la serie scritta sopra è convergente

Esempio 7.3.

Se riconsideriamo la serie (per $n > 0$)

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

Abbiamo appena detto che per $\alpha = 2$ la serie converge. Quindi per il teorema del confronto possiamo dire che per $\alpha \geq 2$ la serie converge. Ricapitolando:

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

Si può dimostrare che la serie converge anche per $1 < \alpha < 2$. Ricapitolando:

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Converge per $\alpha > 1$

Diverge per $\alpha \leq 1$

Esempio 7.4.

Consideriamo la serie

$$\sum \frac{5n + cosn}{3 + 2n^3}$$

Notiamo che:

$$\frac{5n + cosn}{3 + 2n^3} \sim \frac{5n}{2n^3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Possiamo ire quindi che la serie converge.

Esempio 7.5.

Consideriamo la serie

$$\sum \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

Notiamo che la serie non è a termini negativi, ma poiché ci interessa esclusivamente il carattere possiamo cambiare il segno:

$$\sum -\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$
$$-\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \sim \frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n}$$

Pertanto la serie diverge

E' inoltre dimostrabile che:

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Per quanto possa sembrare strano che la somma di infiniti numeri razionali dia un numero irrazionale, ciò non viola la definizione di campo.

7.2.3. Criterio del rapporto

Un altro modo di caratterizzare una serie è il **criterio del rapporto**:

Teorema 7.5	*Data una serie* $\sum a_n$ *a termini non negativi, se esiste* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, *possiamo dire che se:*
	$l > 1$, *allora la serie diverge* $l < 1$, *allora la serie converge* $l = 1$, *allora non ho informazioni sul carattere della serie*

Dimostriamo il criterio:

Dimostrazione 7.4

Hp:	Sia $\sum a_n$ a termini non negativi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$
Th:	$l > 1$, *allora la serie diverge* $l < 1$, *allora la serie converge*
Iniziamo a scrivere la definizione di limite:	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ $l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$
Consideriamo $\boldsymbol{l + \varepsilon < 1}$, lavoriamo sulla parte destra della disuguaglianza:	$a_{n+1} < a_n(l+\varepsilon)$ $a_{n+2} < a_{n+1}(l+\varepsilon) < a_n(l+\varepsilon)^2$ $a_{n+1} < \cdots < a_{n_0}(l+\varepsilon)^{n-n_0-1}$
Per confronto con la serie geometrica corrispondente, diciamo che la serie converge.	$\sum a_{n_0} \underbrace{(l-\varepsilon)}_{<1}^{n-n_0-1}$
Consideriamo $\boldsymbol{l - \varepsilon > 1}$, lavoriamo sulla parte sinistra della disuguaglianza:	$a_{n+1} > a_n(l-\varepsilon)$ $a_{n+2} > a_{n+1}(l+\varepsilon) > a_n(l+\varepsilon)^2$ $a_{n+1} > \cdots > a_{n_0}(l-\varepsilon)^{n-n_0-1}$
Con ragionamento analogo a prima arriviamo a dire che la serie è divergente.	$\sum a_{n_0} \underbrace{(l-\varepsilon)}_{>1}^{n-n_0-1}$

Questo criterio risulta molto utile quando si lavora con fattoriali e/o esponenziali.

7.2.4. Criterio della radice*

Un ulteriore metodo per studiare il carattere di una serie è il **criterio della radice**:

Teorema 7.6 *Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi. Se esiste:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Possiamo dire che se:

$l > 1$, la serie diverge

$l < 1$, la serie converge

$l = 1$, allora non ho informazioni sul carattere della serie

Dimostriamolo:

Dimostrazione 7.5

Hp:	Sia $\sum a_n$ a termini non negativi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$
Th:	*$l > 1$, allora la serie diverge* *$l < 1$, allora la serie converge*
Consideriamo la definizione di limite:	$\left\lvert \sqrt[n]{a_n} - l \right\rvert < \varepsilon$ $l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$
Consideriamo $\boldsymbol{l + \varepsilon < 1}$, lavoriamo sulla seconda parte dlela disuguaglianza:	$\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$ $a_n < (l + \varepsilon)^n$
La serie è maggiorata da una serie convergente e per tanto è convergente	$\sum \underbrace{(l + \varepsilon)}_{<1}{}^n$
Consideriamo $\boldsymbol{l - \varepsilon > 1}$, lavoriamo sulla prima parte dlela disuguaglianza	$\sqrt[n]{a_n} > l - \varepsilon$ $a_n > (l - \varepsilon)^n$
La serie è minorata da una serie divergente e per tanto è divergente	$\sum \underbrace{(l + \varepsilon)}_{>1}{}^n$

Vediamo alcuni esempi:

Esempio 7.6.

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}$$

Se calcoliamo il limite della radice otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$$

La serie quindi è convergente.

Esempio 7.7.

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} a^n$$

Calcoliamo il limite della radice:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{\alpha}{n}} a = \lim_{n\to\infty} a e^{ln\left(n^{\frac{\alpha}{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} a e^{\frac{\alpha}{n} ln(n)} = a$$

Possiamo quindi dire:

Se $0 < a < 1$ la serie converge
Se $a > 1$ la serie diverge

Nel caso in cui $a = 1$, possiamo studiare la serie in questo modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-\alpha}}$$

Quindi:

$Per\ \alpha \geq -1$ la serie diverge
sPer $\alpha < -1$ la serie converge

7.3. Serie a termini a segno variabile*

Quando si lavora con una serie a termini a segno variabile $\sum a_n$, risulta comodo studiare il comportamento della serie:

$$\sum |a_n|$$

Infatti, esiste un teorema che afferma che:

Teorema 7.7 *Se una serie* $\sum a_n$ ***converge assolutamente*** *(ossia* $\sum|a_n|$ *converge), allora* $\sum a_n$ *è convergente*

Dimostriamo lo:

Dimostrazione 7.6

Hp: Sia $\sum \mathrm{a_n}$ una serie
$\sum \mathrm{a_n}$ converge assolutamente

Th: $\sum \mathrm{a_n}$ converge (semplicemente)

Definiamo la serie parziale ***n***-esima:

$$S_n: \sum_{k=0}^{n} a_n$$

E definiamo:

$$S_n^+: \sum_{k=0}^{n} a_n \ \ (consideriamo\ solo\ a_n \geq 0)$$

$$S_n^-: \sum_{k=0}^{n} -a_n \ \ (consideriamo\ solo\ a_n < 0)$$

Possiamo quindi affermare che:

$$S_n = S_n^+ - S_n^-$$

Possiamo affermare che:

- $\boldsymbol{S_n^+}$ **e** $\boldsymbol{S_n^-}$ sono monotone **crescenti**
- $\sum|\boldsymbol{a_n}|$ è limitata ⇒ $\boldsymbol{S_n^+}$ e $\boldsymbol{S_n^-}$ sono superiormente limitate

Le due successioni risultano quindi convergenti, pertanto lo è la loro differenza, che non è altro che la serie stessa.

Vediamo alcuni esempi:

Esempio 7.8.

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \to \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

La serie converge assolutamente per $\alpha > 1$, per tanto converge per $\alpha > 1$

Non possiamo dire nulla sul comportamento della serie per $\alpha \leq 1$

7.3.1. Serie a termini a segno alterno

Un particolare caso di serie a segni variabili sono le serie a termini a segno alterno. Queste serie hanno i termini che rispettano questa condizione:

$$a_n \cdot a_{n-1} \leq 0$$

In generale possono essere scritte in questo modo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \ con \ a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Esiste un modo per capire il carattere, ossia il **criterio di Leibniz**:

Teorema 7.8 *Sia* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *una serie a termini a segno alterno. Se* $\{a_n\}$ *è decrescente e* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*, allora la serie è convergente*

Per dimostrarlo vediamo prima come calcolare approssimativamente il valore di una serie convergente a termini a segno alterno. Possiamo scrivere:

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k \geq S$$

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k \leq S$$

Se ci fermiamo a un *n* pari infatti otteniamo un valore superiore al valore reale, se ci fermiamo a un *n* dispari otteniamo invece un valore inferiore al valore reale. L'errore che commettiamo nell'approssimazione è dato da:

$$|R_n| = \left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k\right| \leq a_n$$

Dimostriamo il teorema:

Dimostrazione 7.7

Hp:	Sia $\sum a_n$ una serie a termini a segno alterno Sia $\{a_n\}$ convergente $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Th:	$\sum a_n$ converge
Consideriamo la successione delle somme parziali di $\boldsymbol{S_{2n}}$:	$S_0 = a_0$ $S_2 = a_0 - a_1 + a_2 = S_0 - a_1 + a_2$ $S_4 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = S_2 - a_3 + a_4$
Poiché $\{\boldsymbol{a_n}\}$ è decrescente possiamo affermare che:	$S_2 \leq S_0$ $S_4 \leq S_2$

Vediamo alcuni esempi:

Esempio 7.9.

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+1}$$

Per prima cosa controlliamo che a_n sia sempre positivo (o negativo). Se per caso la serie è una serie a termini a segno alterno definitivamente, posso studiare il carattere del resto della serie da n in poi.

Per studiare la decrescenza possiamo scrivere:

$$\frac{(n+1)-1}{(n+1)^2+1} - \frac{n-1}{n^2+1} \leq 0$$

In questo caso la monotonia è evidente a occhio, passiamo al calcolo del limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+1} = 0$$

La serie è quindi convergente

Esempio 7.10.

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$$

Risolvere la seguente disequazione risulta complicato:

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n} \leq 0$$

Possiamo quindi studiare il comportamento della funzione associata utilizzando la derivata:

$$f(x) = \frac{\ln(n)}{n}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - lnx}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

La funzione è decrescente da $x = e$ in poi. Possiamo quindi dire che $\{a_n\}$ è definitivamente decrescente $n = \lceil e \rceil$.

Inoltre, la successione tende a 0, quindi possiamo dire che la serie è convergente.

Esempio 7.11.

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1+(-1)^n n^2}{n^3} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3}}_{\substack{\sim\frac{1}{n^2} \\ Converge}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}}_{\substack{converge \\ (Leibniz)}}$$

Sfruttando la linearità della somma quindi troviamo che la serie è convergente.

Esempio 7.12.

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{(-1)^n}{n}}_{\sim\frac{1}{n}}$$

La serie risulta divergente.

7.4. Serie di funzioni

Parlando più in generale introduciamo il concetto di **serie di funzioni**, ossia serie che si possono vedere come serie numeriche dipendenti da un parametro x. Una serie di funzioni sarà quindi del tipo:

$$\sum f_n(x)$$

quando queste serie convergono per ogni valore x appartenente a un certo intervallo esse rappresentano funzioni di nuovo tipo. Se consideriamo ad esempio lo sviluppo di Taylor con resto secondo Lagrange abbiamo:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + E_n(x)$$

Dove $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, e c è un opportuno punto tra x_0 e x

Se la funzione f ha derivate di ogni ordine possiamo scrivere:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Che notiamo essere una serie di funzioni. Non abbiamo alcuna garanzia che la serie sia convergente e che converga a $f(x)$. Ciò sarà infatti vero se per $n \to \infty$, $E_n(x) \to 0$. In questo caso la serie di *Taylor* converge a $f(x)$. Se inoltre accade che, per ogni $x \in I$, $E_n(x) \to 0$ diremo che $f(x)$ è **sviluppabile in serie di Taylor nell'intervallo *I***.

L'intervallo I sarà quindi l'intervallo di un punto con raggio (detto **raggio di convergenza**):

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

Vediamo alcune serie di potenze.

7.4.1. La serie esponenziale

Scriviamo lo sviluppo di MacLaurin all'ordine n di e^x con il resto secondo Lagrange: per ogni n intero esiste un punto c, compreso tra 0 e x, tale che:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} e^c$$

Fissiamo x e facciamo tendere $n \to \infty$. Il punto c può variare con n, ma essendo sempre compreso tra 0 e x, possiamo affermare che:

$$e \leq f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

In ogni caso, per x fissato e $n \to \infty$, e^c si mantiene limitato menre:

$$\frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} \to 0$$

Quindi possiamo dire che:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c\right)=\sum\frac{x^k}{k!}\ per\ ogni\ x\in\mathbb{R}$$

Abbiamo quindi ottenuto che e^x si può scrivere come somma di di una serie di potenze, la sua serie di Taylor, convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$. In particolare, per $x = 1$, abbiamo:

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

A questo punto conosciamo due algoritmi per il calcolo della serie. Il primo è calcolare (per definizione di e):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Il secondo consiste nel calcolare la somma della serie per valori di n molto grandi, ossia calcolare il valore della somma dei primi n elementi della sommatoria.

7.4.2. Le serie di funzioni trigonometriche elementari

Un discorso analogo lo si può ripetere per le funzioni *seno* e *coseno*. Il termine $f^{(n+1)}(c)$ nella formula di MacLaurin, ha la forma $\pm\cos(c)$ o $\pm sen(c)$. Pertanto, ha valore assoluto ≤ 1. Questa limitazione ci basta per ripetere la dimostrazione precedente che ci porta a scrivere:

$$sinx=\sum(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$sinx=\sum(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$

Il fatto che le serie siano a segni alterni, unito al carattere decrescente (in valore assoluto) del termine generale, garantisce la convergenza della serie e rende particolarmente facile il calcolo approssimato.

7.4.3. Serie di potenze

In generale si dice *serie di potenze* una serie del tipo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Con a_k costante reale (o complessa), o variabile reale (o complessa). La più semplice serie di potenze è la serie geometrica, che converge per $|x| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$